Алгоритм SIMPLED согласования полей скорости и давления для численного моделирования термобара в глубоком озере*

Б.О. Цыденов, А.В. Старченко

Томский государственный университет, Томск

Для согласования полей скорости и давления разработана процедура SIMPLED для течений с плавучестью, представляющая собой модификацию известного метода SIMPLE Патанкара и Сполдинга.

При математическом моделировании термобара в глубоком озере для решения уравнений количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+ +2\Omega_z v-2\Omega_y w; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)+2\Omega_x w-2\Omega_z u; \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial uw}{\partial x}+\frac{\partial w^2}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial w}{\partial z}\right)- -\frac{g\rho}{\rho_0}+2\Omega_y u-2\Omega_x v, \quad (3)$$

входящих в численную модель [1], необходимо знать распределение давления. Для согласования полей скорости и давления разработана процедура SIMPLED для течений с плавучестью, представляющая собой модификацию известного метода SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations* – полунеявный метод для связывающих давление уравнений) Патанкара и Сполдинга [2]. Следует заметить, что при использовании процедуры SIMPLE в некоторых случаях скорость сходимости оказывается недостаточно быстрой. Причиной этому является то, что уравнение для поправки

* Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента РФ для молодых ученых и аспирантов (СП-71.2012.5).

давления даёт завышенные значения, несмотря на правдоподобность соответствующих поправок к составляющим скорости. Процедура SIMPLE основана на коррекции скорости только от поправки давления. Однако в численную модель термобара [1] входит уравнение состояния Чена – Миллеро, связывающее плотность воды с температурой, солёностью, давлением [3]:

$$\rho(T,S,p)=\frac{\rho^0(T,S)}{1-\dfrac{p}{K(T,S,p)}}, \tag{4}$$

где T – температура, S – солёность, p – давление, ρ – плотность, $\rho^0(T,S)$ – плотность воды на поверхности озера, $K(T,S,p)$ – объёмный модуль упругости.

Таким образом, уравнение состояния (4), включенное в математическую модель расчёта термобара [1], позволяет учитывать три фактора (температуру, солёность и давление), индуцирующие движение в озере.

Суть метода SIMPLED (“*D*” обозначает англ. слово “*density*” – плотность) заключается в циклической последовательности операций «предположение – коррекция». С помощью некоторого начального поля давления сначала вычисляются компоненты скорости по уравнению движения (1) – (3). Затем давление, плотность и компоненты скорости корректируются так, чтобы удовлетворять уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено сходящееся решение.

Рассмотрим дискретные аналоги уравнений количества движения для составляющих скорости *u* и *w* (здесь и ниже используются обозначения, принятые в [2]):

$$a_e^u u_e=\sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}+b^u+(p_P-p_E)\Delta z; \tag{6}$$

$$a_n^w w_n=\sum_{nb} a_{nb}^w w_{nb}+b^w+(p_P-p_N)\Delta x-\frac{\rho_n g}{\rho_0}\Delta x\cdot\delta z, \tag{7}$$

где $\sum_{nb}$ означает суммирование по всем соседним узлам конечного объёма W, E, S и N; Δx и Δz – шаги сетки в соответствующем направлении (рис.1).

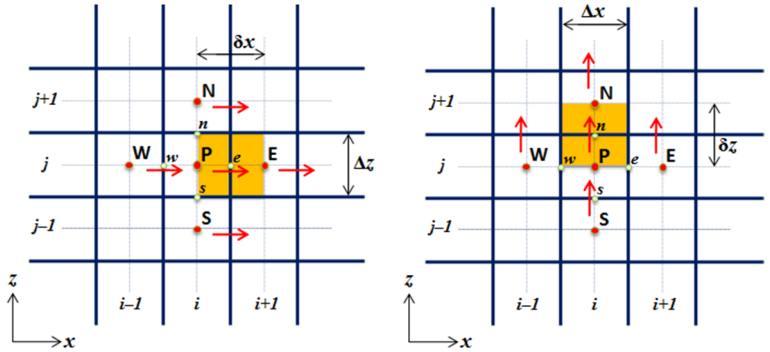


Рис. 1. Конечные объёмы для компонент скорости: для продольной составляющей u (слева), для вертикальной составляющей w (справа)

Выразим поле скорости через u^* и w^* при помощи приближенных полей давления p^* и плотности ρ^*:

$$a_e^u u_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^* + b^u + (p_P^* - p_E^*)\Delta z; \tag{8}$$

$$a_n^w w_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^w w_{nb}^* + b^w + (p_P^* - p_N^*)\Delta x - \frac{\rho_n^* g}{\rho_0}\Delta x \cdot \delta z. \tag{9}$$

Пусть истинное давление определяется из соотношения

$$p = p^* + p',$$

где p' – поправка давления.

Аналогичным образом введем поправки для компонент скорости и плотности:

$$u = u^* + u',$$
$$w = w^* + w',$$
$$\rho = \rho^* + \rho'.$$

Если из (8), (9) вычтем (6), (7) соответственно и отбросим члены $\sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}$ и $\sum_{nb} a_{nb}^w w_{nb}$, то получим поправочные формулы для поля скорости:

$$u_e = u_e^* + d_e(p'_P - p'_E); \tag{10}$$

$$w_n = w_n^* + d_n(p'_P - p'_N) - \frac{\rho'_n g}{\rho_0} c_n, \tag{11}$$

где $d_e = \frac{\Delta z}{a_e^u}$, $d_n = \frac{\Delta x}{a_n^w}$, $c_n = \frac{\Delta x \cdot \delta z}{a_n^w} = d_n \delta z$.

Аналогично можно выразить компоненты скорости:

$$u_w = u_w^* + d_w(p'_W - p'_P); \tag{10a}$$

$$w_s = w_s^* + d_s(p'_S - p'_P) - \frac{\rho'_s g}{\rho_0} c_s, \tag{11a}$$

где $d_w = \frac{\Delta z}{a_e^u}$, $d_s = \frac{\Delta x}{a_s^w}$, $c_s = \frac{\Delta x \cdot \delta z}{a_s^w} = d_s \delta z$.

Интегрируем уравнение неразрывности (5) по конечному объёму:

$$\left(u_e - u_w\right)\Delta z + \left(w_n - w_s\right)\Delta x = 0. \tag{12}$$

Если теперь вместо всех компонент скорости в (12) подставить их выражения из поправочных формул вида (10), (10а), (11), (11а), то после группировки соответствующих членов получим дискретный аналог уравнения для поправки давления:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b, \tag{13}$$

где $a_E = d_e \Delta z$, $a_W = d_w \Delta z$, $a_N = d_n \Delta x$, $a_S = d_s \Delta x$,

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S,$$

$$b = \left(u_w^* - u_e^*\right)\Delta z + \left(w_s^* - w_n^*\right)\Delta x + \frac{g}{\rho_0}\left(c_n \rho'_n - c_s \rho'_s\right)\Delta x. \tag{14}$$

В основе решения систем линейных алгебраических уравнений вида (13) лежит метод неполной факторизации (явный метод Н. И. Булеева) [4].

Таким образом, алгоритм SIMPLED имеет следующую последовательность операций на каждом шаге по времени:

1. Задание приближенного поля давления p^*, температуры T^* и солёности S^*.

2. Решение уравнений количества движения для получения приближенных значений компонент скорости u^* и w^*.

3. Решение уравнений энергии (для получения T) и солёности (для получения S) и расчёт $\rho' = \rho(p^*, T, S) - \rho(p^*, T^*, S^*)$.

4. Решение уравнения для поправки давления p'.

5. Расчёт поля давления p из уравнения $p = p^* + p'$.

6. Корректировка компонент скорости u и w.

7. Решение уравнений энергии (для получения T) и солёности (для получения S) и расчёт $\rho = \rho(p, T, S)$.

8. Решение дискретных аналогов для других Ф (концентрации, турбулентных характеристик).

9. Возврат к пункту 2 и повтор расчётов до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

Следует признать, что одна итерация SIMPLED в отличие от SIMPLE требует больше расчётных усилий. Однако дополнительное усилие на итерацию более чем компенсируется экономией общего расчётного времени, так как SIMPLED позволяет увеличить шаг по времени в два раза.

Литература

1. *Цыденов Б.О., Старченко А.В.* Численная модель взаимодействия систем «река – озеро» на примере весеннего термобара в озере Камлупс // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2013. № 5(25) С. 102–115.

2. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости : пер. с англ.; под ред. В.Д. Виленского. М. : Энергоатомиздат, 1984. 124 с.

3. *Chen C.T., Millero F.G.* Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // Limnol. Oceanogr. 1986. Vol. 31, № 3. P. 657–662.

4. *Булеев Н.И.* Метод неполной факторизации для решения двумерных и трехмерных разностных уравнений типа диффузии // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. Т. 10, № 4. С. 1042–1044.