Применение неявного итерационного полинейного рекуррентного метода для решения задачи о течении несжимаемой вязкой жидкости в плоской каверне

А.А. Фомин, Л.Н. Фомина

Кузбасский государственный технический университет, Кемерово
Кемеровский государственный университет, Кемерово

Рассматривается задача о течении несжимаемой вязкой жидкости в плоской каверне с подвижной верхней крышкой, которая движется с постоянной скоростью.

Целью настоящей работы является оценка эффективности применения неявного итерационного полинейного рекуррентного метода [1] при численном моделировании динамики несжимаемой вязкой жидкости на примере решения классической задачи о течении в плоской каверне с подвижной верхней крышкой. Данная задача удобна тем, что является своеобразным полигоном, на котором исследователи демонстрируют свои достижения в области численного моделирования динамики несжимаемой вязкой жидкости: новизну алгоритмов решения, аппроксимаций дифференциальной постановки задачи, методов решения СЛАУ, способов разрешения сингулярностей и разрывов в верхних угловых точках и многое другое. При этом необходимо заметить, что решение данной задачи давно уже вышло за рамки моделирования физического процесса, поскольку ещё в работе [2] было показано, что при числах Re ~ 1000 в подобных течениях возникают существенно трёхмерные неустойчивости, приводящие к турбулизации потока, в то время как большинство современных работ оперируют с числами Re от 1000 и выше, оставаясь при этом в рамках решения уравнений Навье–Стокса.

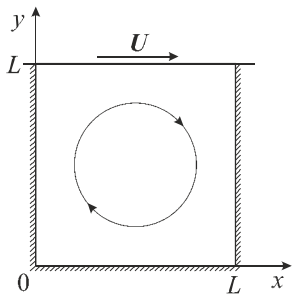


Рис. 1

На рис. 1 представлены система координат и схема течения рассматриваемой задачи. Математическая постановка, в которой в качестве искомого

решения выбрана тройка естественных параметров *u, v, p,* имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \quad (3)$$

На боковых и нижней границах имеют место условия

$$u=v=0;\frac{\partial p}{\partial n}=0; \quad (4)$$

на верхней границе

$$u=1;\quad v=0;\frac{\partial p}{\partial n}=0. \quad (5)$$

Здесь *x, y* – пространственные координаты, *t* – время, *u, v* – компоненты скорости $\vec{V}$ вдоль *x, y* координат соответственно, *p* – давление, *n* – нормаль к границе каверны; *Re* = *UL*/υ, где υ – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Расчетная область покрывается ортогональной сеткой, в узлах которой определяются элементы векторов решения. Разностная аппроксимация задачи (1) – (5) производится методом контрольного объема со вторым порядком точности по пространству и первым – по времени [3].

Алгоритм решения задачи представляет собой классическую трёхшаговую схему [4], на первом шаге которого определяются предварительные значения компонент скорости потока *u*, v** на базе градиентов давления с предыдущей итерации

$$u^*=u^n-\tau\left[u^{n-1}\frac{\partial u^*}{\partial x}+v^{n-1}\frac{\partial u^*}{\partial y}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p^{n-1}}{\partial x}\right]; \quad (6)$$

$$v^* = v^n - \tau\left[u^{n-1}\frac{\partial v^*}{\partial x} + v^{n-1}\frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p^{n-1}}{\partial y}\right]. \qquad (7)$$

Здесь τ – шаг по временным слоям, верхний индекс «n» – номер слоя по времени.

На втором шаге путём решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau}\mathrm{div}\vec{V}^* \qquad (8)$$

определяется поправка поля давления p', с помощью которой корректируются поля скорости и давления на третьем шаге алгоритма

$$u^n = u^* - \tau\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad v^n = v^* - \tau\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad p^n = p^{n-1} + \sigma p', \qquad (9)$$

где σ – итерационный параметр. Необходимо пояснить, что схема (6) – (9) изложена в варианте определения стационарного решения методом установления.

Реализация схемы (6) – (9) всегда была связана с двумя проблемами: 1) поточечной сходимостью векторов решения $\left\{u_{ij}^n\right\}$, $\left\{v_{ij}^n\right\}$, $\left\{p_{ij}^n\right\}$ при итерировании по временным слоям; 2) решением СЛАУ, полученной при разностной аппроксимации задачи Неймана на базе уравнения (8). И если первая проблема является естественной сутью используемой схемы решения задачи, то вторая может быть преодолена путём применения мощного метода решения разностных эллиптических СЛАУ, что и было сделано в рамках настоящего исследования. Для построения решений периодически возникающих на каждом слое по времени СЛАУ использовался неявный итерационный полинейный рекуррентный метод второго порядка экстраполяции, ускоренный в подпространствах Крылова, так называемый LR2sK [1].

Сходимость решений СЛАУ определялась по величине первой нормы разности двух последовательных приближений векторов решений, которая должна быть меньше наперёд заданной точности ξ, умноженной на первую норму вектора приближения решения. Для СЛАУ на базе уравнений движения (6) – (7) точность

принималась равной $\xi = 5\times10^{-7}$, а на базе уравнения Пуассона (8) – $\xi = 10^{-8}$. Решение считалось установившимся в случае, когда $\left\|\mathrm{div}\vec{V}^*\right\|_{\mathrm{I}} < \varepsilon$, где оценка ε производится на основе абсолютных минимальных значений функции тока ψ и характерного сеточного шага h (поле ψ определяется через найденные поля u и v для построения линий тока течения):

$$\varepsilon \sim \mathrm{div}\vec{V} \sim \frac{\delta V}{h} \sim \frac{\delta\psi}{h^2} \Rightarrow \varepsilon \sim \frac{\delta\psi}{h^2}, \qquad (10)$$

где δV и $\delta\psi$ – погрешности векторов компонент скорости и функции тока соответственно. В настоящем исследовании при ожидаемых $\psi \sim 10^{-10}\div10^{-12}$ и $h \sim 10^{-3}$ была использована величина $\varepsilon = 10^{-5}$.

Достоверность полученных решений задачи подтверждается путём сравнения с литературными данными. В частности, в табл. 1 представлены параметры центрального (первичного) вихря течения при Re = 1000.

Таблица 1

Источник	Параметры вихря			
	xc	yc	ψc	ωc
R. Schreiber, H. B. Keller [5]	–	–	−0,1160	−2,026
D. Kwak, S. E. Rogers [6]	–	–	−0,1171	−2,044
U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin [7]	0,5313	0,5625	−0,1179	−2,050
В. П. Шапеев, В. И. Исаев [8]	0,5308	0,5652	−0,1189	–
Данная работа	0,5315	0,5645	−0,1186	−2,059

Здесь x_c, y_c – координаты центра вихря, ψ_c и ω_c – экстремумы соответственно функции тока и завихренности в центре первичного вихря.

В работах других авторов неоднократно отмечалось, что решение СЛАУ на базе уравнений движения (6) – (7) не представляет трудностей. Действительно, в настоящем исследовании оценки чисел обусловленности по первой норме матриц таких СЛАУ в широком диапазоне чисел Re = 100÷1000 и сеточных разрешений от 65×65 до 1025×1025 дают значения в пределах нескольких сотен, что говорит об отсутствии каких-либо трудностей при построении решений данных систем уравнений. В среднем для достижения заданной точности требовалось от 4–5 на

начальном этапе расчёта варианта до 1–2 итераций на момент установления решения.

Совершенно иная картина складывается при решении СЛАУ на базе уравнения (8). Как уже указывалось ранее, решение подобных систем представляет собой одну из двух основных проблем при численном моделировании динамики несжимаемой вязкой жидкости. На рис. 2 представлены зависимости количества итераций k_p, необходимых для нахождения полей поправки давления p' от номера слоя по времени n методами LR2sK и бисопряженных градиентов со стабилизацией [9] с предобусловливанием на базе явного метода Н. И. Булеева (Bi-CGStab P B). Хорошо видно, что в среднем на каждом слое по времени для сходимости LR2sK требуется 10–20 итераций, а для Bi-CGStab P B – 200–400 итераций. Любопытно, что для обоих методов данный результат практически не зависит от сложности решаемой задачи, которая определяется величиной числа Re и сеточным разбиением области (чем больше, тем сложнее задача).

И хотя одна итерация метода Bi-CGStab P B выполняется в 2–3 раза быстрее одной итерации LR2sK, преимущество использования последнего не вызывает сомнений. Это преимущество также подтверждается данными табл. 2, в которой представлены абсолютные времена (сек) решения задачи при Re = 1000 при применении методов LR2sK и Bi-CGStab P B при различных сеточных разбиениях области.

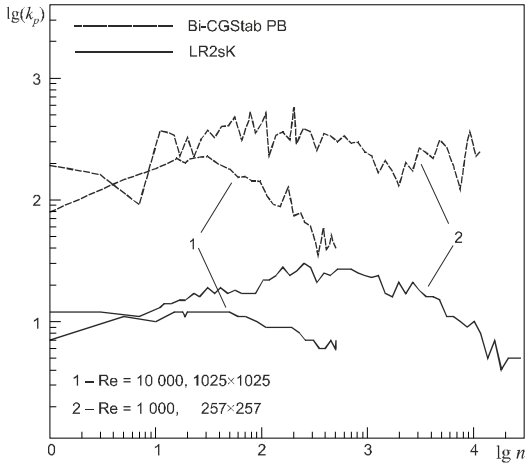


Рис. 2

Из данных табл. 2 следует, что трудоёмкость расчётов резко растёт по мере увеличения сеточного разбиения области: приблизительно на порядок при увеличении количества узлов сеточного разбиения в 4 раза. Данный факт в наилучшей степени иллюстрирует характер поточечной сходимости используемой трехшаговой схемы решения задачи.

Таблица 2

Метод	Сетка				
	65×65	129×129	257×257	513×513	1025×1025
LR2sK	3,0	16,0	149,0	1 903,8	23 396,0
Bi-**CGStab** P B	5,0	32,0	421,0	8 898,0	143 076,0

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что использование неявного итерационного полинейного рекуррентного метода полностью себя оправдывает и, соответственно, позволяет снять одну из двух проблем численного моделирования динамики несжимаемой вязкой жидкости.

Литература

1. *Фомин А. А., Фомина Л. Н.* Неявный итерационный полинейный рекуррентный метод решения разностных эллиптических уравнений. Кемерово: КемГУ, 2012. 314 с.
2. *Koseff J. R., Street R. L.* Visualization studies of a shear driven three-dimensional recirculating flow // J. Fluids Engng. 1984. Vol. 106. P. 21–29.
3. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат,1984. 152 с.
4. *Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щенников В. В.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 1. С. 197–207.
5. *Schreiber R., Keller H. B.* Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques // J. Comp. Physics. 1983. Vol. 49. P. 310–333.
6. *Rogers S. E., Kwak D.* An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // Applied Numerical Mathematics. 1991. Т. 8. С. 43–64.

7. *Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T.* High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // Journal of Computational Physics. 1982. Vol. 48. P. 387–411.
8. *Исаев В. И., Шапеев В. П.* Варианты метода коллакации и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Навье–Стокса // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50, № 10. С. 1758–1770.
9. *Van der Vorst H. A.* Bi-CGStab: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1992. Vol. 13, № 2. P. 631–644.