Обобщение метода погранфункций для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений в случае, когда особенность появляется на границе и в центре круга

К. Алымкулов, Т.Д. Турсунов

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

Рассматривается задача Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Для решения задачи построено равномерное асимптотическое разложение.

При математическом моделировании процессов конвективно-диффузионного переноса, химической кинетики и др. возникают краевые задачи для уравнений эллиптического типа второго порядка с малым параметром при старших производных. Явное решение этих задач построить в общем случае не удается, поэтому используют разные асимптотические методы. Основополагающими в этом направлении являются работы А.Н. Тихонова, А.Б. Васильевой, С.А. Ломова, В.Б. Бутузова, Л.И. Люстерника, М.И. Вишика, А.М. Ильина. В случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет негладкое решение, эти задачи, по терминологии А.М. Ильина [1], называют бисингулярными. Ранее для построения асимптотики бисингулярно возмущенных задач применялся метод сращивания, а метод пограничных функций не использовался напрямую. В работе предложена модификация метода пограничных функций [2], благодаря которой стало возможным построить асимптотику решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения.

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. Применяя обобщенный метод пограничных функций, построено асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в случае, когда предельное уравнение имеет особенность на граничных точках области. Задача рассматривается в круге.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения

$\varepsilon\Delta u-(1-\rho)\rho u=f(\rho,\varphi,\varepsilon)$, $(\rho,\varphi)\in D=\{(\rho,\varphi)|0\le\rho<1,\ 0\le\varphi<2\pi\}$, (1)

$u(1,\varphi,\varepsilon)=\psi(\varphi,\varepsilon)$, (2)

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – оператор Лапласа, $\psi(\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k(\varphi)\varepsilon^k$, $\psi(\varphi)\in C^{\infty}[0,\ 2\pi]$, $\psi(\varphi,\varepsilon)$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)$ – заданные функции, $u=u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ – искомая функция.

(Условие **U**) Пусть $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(\rho,\varphi)\varepsilon^k$, $f_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty,\infty)}_{(\rho,\varphi)}(\overline{D})$, $f(1,\varphi,0)\ne0$, $f(0,\varphi,0)\ne0$.

Как всегда, сначала рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), которое ищем в виде:

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi),\quad \varepsilon\to0. \tag{3}$$

После подстановки (3) в (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получим рекуррентную систему уравнений:

$-(1-\rho)\rho v_0(\rho,\varphi)=f_0(\rho,\varphi)$,

$(1-\rho)\rho v_k(\rho,\varphi)=\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-f_k(\rho,\varphi)$, $k\in\mathbf{N}$.

Отсюда однозначно определяются все $v_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty,\infty)}_{(\rho,\varphi)}(D\setminus(0,0))$:

$v_0(\rho,\varphi)=-f_0(\rho,\varphi)/(1-\rho)\rho$,

$v_k(\rho,\varphi)=(\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-f_k(\rho,\varphi))/(1-\rho)\rho$, $k\in\mathbf{N}$,

значит,

$$V=-\frac{f_0(\rho,\varphi)}{(1-\rho)\rho}+\frac{\varepsilon}{((1-\rho)\rho)}F_1(\rho,\varphi)+\ldots+\frac{\varepsilon^n}{((1-\rho)\rho)^{3n+1}}F_n(\rho,\varphi)+\ldots,\ \varepsilon\to0,$$

$F_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty,\infty)}_{(\rho,\varphi)}(\overline{D})$, $k\in\mathbf{N}$.

Заметим, что при $\rho=1$ и $\rho=0$ на границе круга D и в центре круга, все эти функции $v_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности:

$v_k(\rho,\varphi)=O(1/((1-\rho)\rho)^{3k+1})$.

Построение ФАР решения

Решение задачи (1) – (2) будем искать в виде

$u=v_0(\rho,\varphi)+\pi_{-1}(\tau,\varphi)/\mu+\pi_0(\tau,\varphi)+w_{-1}(\eta,\varphi)/\mu+w_0(\eta,\varphi)+R(\rho,\varphi)$, (4)

где $\tau=(1-\rho)/\mu, \eta=\rho/\mu$, $\varepsilon=\mu^3$.

Подставляя (4) в (1), получим:

$$\varepsilon\Delta v_0-(1-\rho)\rho v_0+\frac{\partial^2\pi_{-1}}{\partial\tau^2}-\tau\pi_{-1}+\mu\left(\frac{\partial^2\pi_0}{\partial\tau^2}-\tau\pi_0-\frac{\partial\pi_{-1}}{\partial\tau}+\tau^2\pi_{-1}\right)+\Delta_{\eta\varphi}w_{-1}-$$
$$-\eta w_{-1}+\mu\Delta_{\eta\varphi}w_0-\eta w_0+\eta^2 w_0+O(\mu^2)+\varepsilon\Delta R-(1-\rho)\rho R=f_0(\rho,\varphi)+O(\varepsilon)-$$
$$-H(\rho,\varphi)+H(\rho,\varphi), \qquad (5)$$

где $\Delta_{\eta\varphi}=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial^2}{\eta^2\partial\varphi^2}$.

Из граничного условия (2) имеем

$v_0(1,\varphi)+\pi_{-1}(0,\varphi)/\mu+\pi_0(0,\varphi)+w_{-1}(1/\mu,\varphi)/\mu+w_0(1/\mu,\varphi)+R(1,\varphi)=$
$=\psi_0(\varphi)+O(\varepsilon)$.

Отсюда получим:

$$\pi_{-1}(0,\varphi)=0, \qquad (6)$$
$$\pi_0(0,\varphi)=\psi_0(\varphi)-v_0(1,\varphi), \qquad (7)$$
$$w_{-1}(1/\mu,\varphi)=0, \qquad (8)$$
$$w_0(1/\mu,\varphi)=0, \qquad (9)$$
$$R(1,\varphi)=O(\varepsilon). \qquad (10)$$

Здесь в правую часть уравнения прибавили и убавили одну и ту же функцию $H(\rho,\varphi)$, которую определяем ниже.

Из (5) имеем

$-(1-\rho)\rho v_0=f_0(\rho,\varphi)-H(\rho,\varphi)$.

Отсюда

$v_0(\rho,\varphi)=-(f_0(\rho,\varphi)-H(\rho,\varphi))/(1-\rho)\rho$,

здесь мы определим неизвестную функцию $H(\rho,\varphi)$ так, чтобы $v_0(\rho,\varphi)\in C^{(\infty,\infty)}_{(\rho,\varphi)}(\overline{D})$. Отсюда $H_0(\rho,\varphi)=f_0(1,\varphi)\rho+f_0(0,\varphi)(1-\rho)$.

Следовательно,

$$v_0(\rho,\varphi)=-(f_0(\rho,\varphi)-f_0(1,\varphi)\rho-f_0(0,\varphi)(1-\rho))/(1-\rho)\rho, \qquad (11)$$
$$v_0(\rho,\varphi)\in C^{(\infty,\infty)}_{(\rho,\varphi)}(\overline{D}).$$

Учитывая условия (6)–(10), из (5) получим следующие задачи:

$$\frac{\partial^2\pi_{-1}}{\partial\tau^2}-\tau\pi_{-1}=f_0(1,\varphi),\ \pi_{-1}(0,\varphi)=0; \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2\pi_0}{\partial\tau^2}-\tau\pi_0=\frac{\partial\pi_{-1}}{\partial\tau}-(\tau\pi_{-1}+f_0(1,\varphi))\tau,\ \pi_0(0,\varphi)=\psi_0(\varphi)-v_0(1,\varphi)$$

или

$$\frac{\partial^2\pi_0}{\partial\tau^2}-\tau\pi_0=\frac{\partial\pi_{-1}}{\partial\tau}-\tau\ \frac{\partial^2\pi_{-1}}{\partial\tau^2},\ \pi_0(0,\varphi)=\psi_0(\varphi)-\nu_0(1,\varphi); \tag{13}$$

$$\Delta_{\eta\varphi}w_{-1}-\eta w_{-1}=f_0(0,\varphi),\ w_{-1}(1/\mu,\varphi)=0; \tag{14}$$

$$\Delta_{\eta\varphi}w_0-\eta w_0=\eta\Delta_{\eta\varphi}w_{-1},\ w_0(1/\mu,\varphi)=0; \tag{15}$$

$$\varepsilon\Delta R_0-(1-\rho)\rho R_0=-\varepsilon\Delta v_0+O(\varepsilon),\ R(1,\varphi)=O(\varepsilon). \tag{16}$$

Функции $\pi_{-1}(\tau,\varphi)$, $\pi_0(\tau,\varphi)$ являются обобщенными погранфункциями, поэтому на них накладываем дополнительные условия:

$\pi_{-1}(\tau,\varphi)\to 0$, $\pi_0(\tau,\varphi)\to 0$, при $\tau\to\infty$.

Если ввести оператор $l\equiv\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\tau$, то имеем:

$$l\pi_{-1}=f_0(1,\varphi),\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_{-1}(\tau,\varphi)=0,\ \pi_{-1}(0,\varphi)=0, \tag{17}$$

$$l\pi_0=\frac{\partial\pi_{-1}}{\partial\tau}-\tau\ \frac{\partial^2\pi_{-1}}{\partial\tau^2},\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_0(\tau,\varphi)=0,\ \pi_0(0,\varphi)=\psi_0(1,\varphi)-\nu_0(1,\varphi). \tag{18}$$

Как нам известно, уравнение Эйри $z''-\tau z=0$ имеет два независимых решения $Ai(\tau)$ и $Bi(\tau)$.

Учитывая это, мы сможем записать решения задачи (17), (18):

$$\pi_{-1}(\tau,\varphi)=-\pi f_0(1,\varphi)\left(Ai(\tau)\int_0^\tau Bi(s)ds-\sqrt{3}Ai(\tau)\int_0^\infty Ai(s)ds+Bi(\tau)\int_\tau^\infty Ai(s)ds\right),$$

$$\pi_0(\tau,\varphi)=-\pi(Ai(\tau)\left(\int_0^\tau Bi(s)\Phi(s,\varphi)ds-\sqrt{3}\int_0^\infty Ai(s)\Phi(s,\varphi)ds\right)+$$

$$+Bi(\tau)\int_\tau^\infty Ai(s)\Phi(s)ds)+\frac{\psi_0(1,\varphi)-\nu_0(1,\varphi)}{Ai(0)}Ai(\tau),$$

где $\Phi(\tau,\varphi)=\frac{\partial\pi_{-1}}{\partial\tau}-\tau\ \frac{\partial^2\pi_{-1}}{\partial\tau^2}$.

Асимптотика решения задачи (12), (13) при $\tau\to\infty$, имеет вид:

$\pi_{-1}(\tau,\varphi)=O(\tau^{-1})$,

$l\pi_0=O(\tau^{-2})\Rightarrow\pi_0(\tau,\varphi)=O(\tau^{-3})$.

Задачи (14) и (15) имеют единственные решения. При $\eta\to\infty$ имеем асимптотику:

$w_{-1}(\eta,\varphi)=O(\eta^{-1})$,

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial\eta^2}+\frac{\partial w_0}{\eta\partial\eta}+\frac{\partial^2 w_0}{\eta^2\partial\varphi^2}-\eta w_0=O(\eta^{-2})\Rightarrow w_0(\eta,\varphi)=O(\eta^{-3}).$$

Оценка остаточного члена $R(\rho,\varphi)$

Задачу (16) запишем в виде

$\varepsilon\Delta R-(1-\rho)\rho R=O(\varepsilon)$, $R(1,\varphi)=O(\varepsilon)$.

Отсюда получим

$|R(\rho,\varphi)|\le c\varepsilon^{2/3}$, $c>0$ – const.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть выполняется условие **U**, тогда для решения задачи (1) – (2) справедливо асимптотическое разложение

$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=v_0(\rho,\varphi)+\pi_{-1}(\tau,\varphi)/\mu+\pi_0(\tau,\varphi)+w_{-1}(\eta,\varphi)/\mu+w_0(\eta,\varphi)+O(\varepsilon^{2/3})$,

где $\tau=(1-\rho)/\mu$, $\eta=\rho/\mu$, $\varepsilon=\mu^3$.

Литература

1. *Ильин А.М., Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

2. *Alymkulov K.* Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point //American J.Math. & Statistics. 2013. V.3. N.1. P. 53–61.