ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Н.Н. Богословский, А.В. Старченко

Томский государственный университет

Рассматривается двумерное нестационарное рециркуляционное ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в прямоугольной полости (каверне) с верхней стенкой, движущейся со скоростью W_0 (рис. 1).

Теплофизические свойства жидкости постоянны. На стенках каверны скорость жидкости равна скорости ограничивающих течение поверхностей.

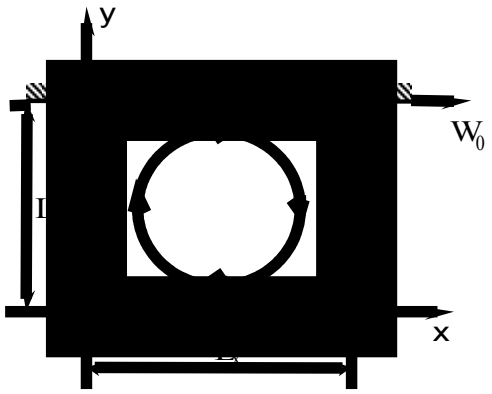

Рис.1 Область исследования

1. Математическая постановка задачи

Исследуемое течение описывается уравнениями Навье-Стокса [1], которые включают:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad (1)$$

б) уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} = \vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

а также уравнениями состояния:

$$\rho = const; \vartheta = const \tag{3}$$

и граничными условиями (условиями прилипания):

$$\begin{aligned} &u\big|_{x=0} = v\big|_{x=0} = 0;\ u\big|_{x=L_x} = v\big|_{x=L_x} = 0; \\ &u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0;\ v\big|_{y=L_y} = 0; u\big|_{y=L_y} = W_o. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь u,v – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно; ϑ – коэффициент кинематической вязкости; ρ – плотность; p – давление.

В качестве начальных условий выбираются нулевые значения скорости жидкости во всей каверне.

2. Метод расчета

Система уравнений (1)–(3) с граничными условиями (4) решалась численно методом расщепления по физическим процессам. Решение задачи на шаге $t_j \le t \le t_{j+1}$ получим как результат последовательного решения двух более простых систем.

а) Система уравнений, описывающих перенос субстанций вдоль траекторий и молекулярный обмен при известном поле давления:

$$\frac{\tilde{u} - u^t}{\Delta\tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^t\tilde{u} - \vartheta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{p^t}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^t\tilde{u} - \vartheta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right) = 0;$$

$$\frac{\tilde{v} - v^t}{\Delta\tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^t\tilde{v} - \vartheta\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^t\tilde{v} - \vartheta\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + \frac{p^t}{\rho}\right) = 0.$$

б) Система уравнений, обеспечивающих согласование поля давления и компонент скорости на слое t_{j+1}. Давление запишем в виде $p^{t+\Delta\tau} = p^t + p'$, $\Delta\tau = t_{j+1} - t_j$.

$$\frac{u^{t+\Delta\tau} - \tilde{u}}{\Delta\tau} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x};\quad \frac{v^{t+\Delta\tau} - \tilde{v}}{\Delta\tau} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y};\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^{t+\Delta\tau} = 0.$$

Дискретизация, т.е. получение конечно-разностного аналога исходной системы дифференциальных уравнений, производится методом контрольного объема [2]. В данной работе использовались неравномерные шахматные сетки с узлами, сгущающимися к границе расчетной области. Построенная разностная схема является неявной и имеет первый порядок точности относительно $\Delta\tau$. При аппроксимации конвективных членов применяется противопотоковая схема, а для диффузионных – центрально-разностная. Полученная система сеточных уравнений является системой положительного типа с диагональным преобладанием.

Рассмотренный выше алгоритм можно представить в виде следующей последовательности шагов:

1) Задание начального поля давления p^0 и полагаем $p^t = p^0$, $t = 0$.

2) Задание начального поля скорости u^0, v^0.

3) Решение уравнений движения для получения $\tilde{u}, \tilde{v}$.

4) Решение уравнения для p' и расчет $p^{t+\Delta\tau}$ путем добавления p' к p^t.

5) Расчет $u^{t+\Delta\tau}, v^{t+\Delta\tau}$ с помощью формул для поправки скорости.

6) Полагаем $t = t + \Delta\tau$.

7) Если $t < T_{\max}$, то возврат к шагу 3.

Системы алгебраических уравнений для компонент скорости и поправки давления, получающиеся при аппроксимации исходной дифференциальной задачи, решаются с помощью явного метода Н.И. Булеева [3].

3. Параллельная реализация

На рис. 2 схематично представлено распределение данных между процессами. Нижняя часть выделенного круга представляет область, рассчитываемую 0-процессом, а верхняя – область, рассчитываемую 1-процессом. Кружками обозначены точки, в которых вычисляется давление, а штрихи на гранях конечных объемов соответствуют точкам вычисления горизонтальной и вертикальной компонент скорости. На разных этапах расчетов требовалась синхронизация вычислений между соседними процессами, т.е. обмен данными, расположенными в прилежащих к границам разрезов областях. Например, для расчета давления вблизи разрезов требуются четыре смежных значения (шаблон «крест»), три из которых рассчитываются и расположены в данном процессе, а четвертое, вычисленное соседним процессом, необходимо получить.

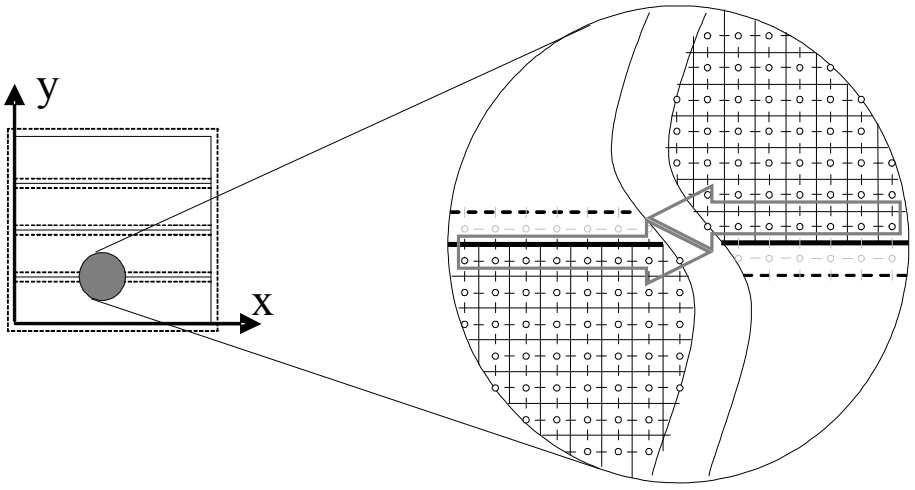

Рис. 2 Одномерная декомпозиция

По этой причине необходима пересылка значений последней строки 0-процесса 1-процессу, равно как и получение от него его первой строки. Для этой цели использовались операции блокирующей парной пересылки данных MPI (функция SendRecv). Аналогичным образом выглядит схема расчета и обмена значениями для компонент скорости u и v.

4. Результаты

Для проверки правильности работы вычислительной программы и адекватности рассматриваемой модели реальным процессам были проведены сравнения результатов расчетов с результатами расчетов, полученными другими авторами [1]. В правильности расчетов можно убедится, обратившись к рис. 3, где изображены профили *x*-компоненты скорости в среднем вертикальном сечении каверны с подвижной верхней стенкой. Точками представлены расчеты, полученные при помощи алгоритма SIMPLE [2]. На рис 4 показано ускорение вычислительного процесса, полученное при расчете на сетке 100x100 и 200x200. При расчетах на сетке 100x100 вплоть до использования 10 процессоров ускорение линейно растет, а затем начинает падать.

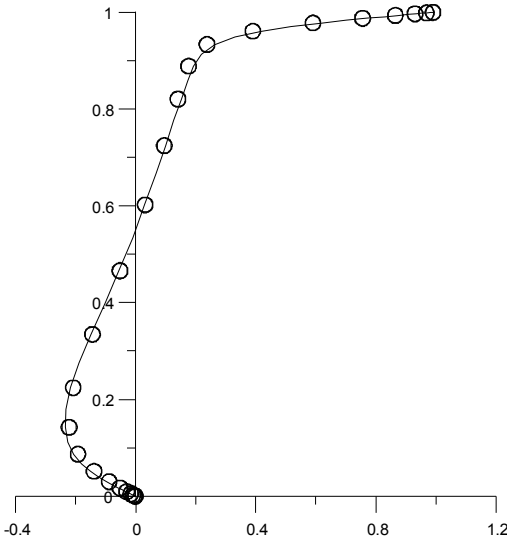

Рис. 3 Профили скорости

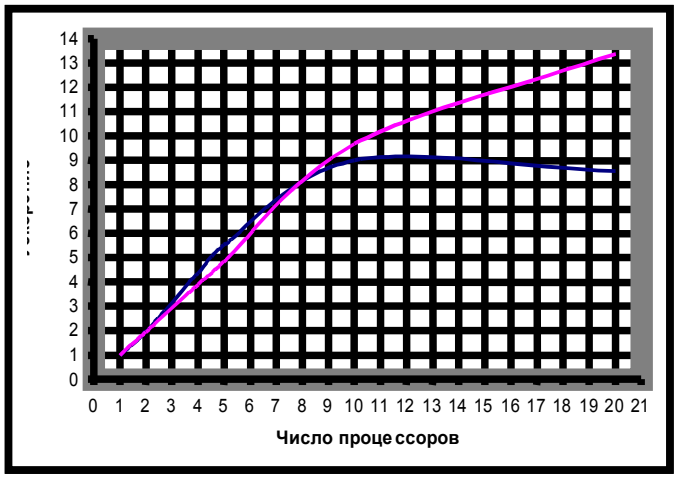

Рис.4 Ускорение параллельной программы

Это объясняется тем, что уже при десяти процессорах отношение объема пересылаемых данных к объему данных, для которых проводятся вычисления, равно 1/5. А так как операция пересылки выполняется на порядок медленнее арифметической операции, то соответственно при росте числа процессоров время расчета будет увеличиваться, а значит, и ускорение будет падать. При расчетах же на сетке 200x200 установлены большие значения ускорения. Максимальное ускорение, которого удалось достичь, равно 13.3 для 20 процессоров.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
3. Богословский Н.Н., Есаулов А.О. Параллельная реализация итерационных методов решения уравнения Пуассона // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах: Материалы 2-го Международного научно-практического семинара. – Нижний Новгород: Изд-во Ниж. ун-та, 2002. – С. 30–37.