ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Л.Л. Миньков, Е.В. Пикущак

Томский государственный университет

В данной работе проводится оценка эффективности и ускорения параллельных алгоритмов решения задачи о распаде произвольного разрыва в идеальном газе, описываемого системой нестационарных газодинамических уравнений в одномерном приближении, и решения задачи о стационарном течении невязкого газа в сопле Лаваля, получаемого на основе метода установления, в двумерном осесимметричном приближении.

1. Задача о распаде произвольного разрыва

Система одномерных уравнений газовой динамики имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

где U – вектор консервативных переменных; F – вектор потоков:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{pmatrix};$$

ρ - плотность; u – скорость; p – давление; E – полная энергия, $E = e + \frac{1}{2}u^2$;

H – энтальпия, $H = E + \frac{p}{\rho}$.

Для замыкания системы уравнений (1), представляющей собой дифференциальную форму законов сохранения, привлекается уравнение состояния, которое для совершенного газа имеет вид: $e = \frac{p}{\rho(k-1)}$, k – отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

В начальный момент времени задаются следующие условия:

$\rho = 1,\ u = 0,\ p = 1$ для $x < 0$;

$\rho = 0.125,\ u = 0,\ p = 0.1$ для $x > 0$.

Численное решение данной задачи проводится с использованием явной разностной схемы. Область решения по пространству разбивается на

N отрезков (ячеек). Разностный аналог системы (1) записывается в следующем виде:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{h} = 0. \qquad (2)$$

Система (2) решается в два этапа. Сначала по известным на нижнем временном слое t_n значениям параметров в ячейках U_i^n вычисляются потоки $F_{i-1/2}$ на гранях ячеек, где i – номер ячейки, $i = 1,\ldots,N$, затем с помощью (2) вычисляют U_i^{n+1} на верхнем временном слое t_{n+1}.

Для вычисления потоков на гранях ячеек используется либо метод Ван Лира [1], либо метод С.К.Годунова [2].

Для распараллеливания полученных последовательных алгоритмов применяется геометрическая декомпозиция, т.е. каждый процесс, получая исходные данные, находит решение поставленной задачи в отведенной ему геометрической подобласти (на отрезке области интегрирования по пространству). Чтобы определить значения потоков на границах отрезка, на каждом процессе вводятся две дополнительные граничные ячейки, куда соседние процессы посылают известные значения величин U_1^n и U_M^n (рис.1).

Здесь M – количество ячеек, отводящихся одному процессу. Переда-

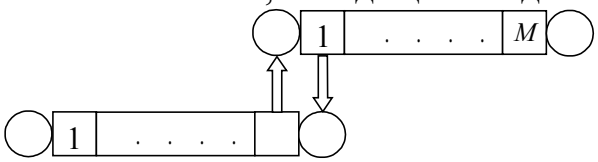

Рис. 1. Схема обмена данными между процессами

ча данных основана на концепции передачи сообщений с использованием стандарта MPI (Message Passing Interface) [3].

Полученные параллельные алгоритмы для решения исходной системы (1) были протестированы на вычислительном кластере ТГУ.

Ускорение $S_p = t_1/t_p$ и эффективность $E_p = S_p/p$ параллельных алгоритмов (t_1 – время выполнения алгоритма на одном процессоре, t_p – время выполнения алгоритма на системе из p процессоров) определяются в зависимости от числа процессов и числа разностных ячеек, приходящихся на всю область интегрирования. Число процессов изменялось от 1 до 16. Расчеты проводились на трех разностных сетках с числом ячеек N=1680, 3360, 6720.

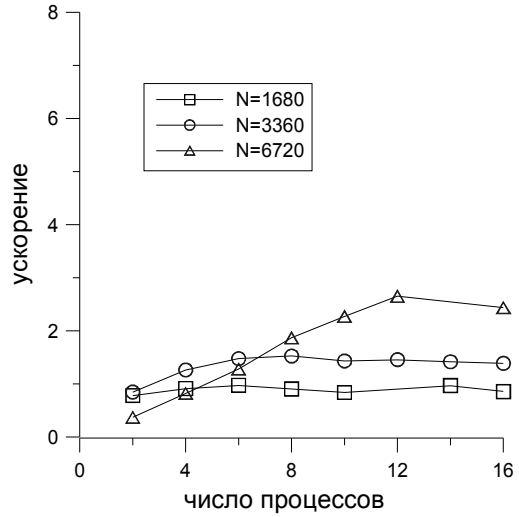

Рис. 2. Зависимость ускорения параллельного алгоритма для метода Ван- Лира от числа процессов

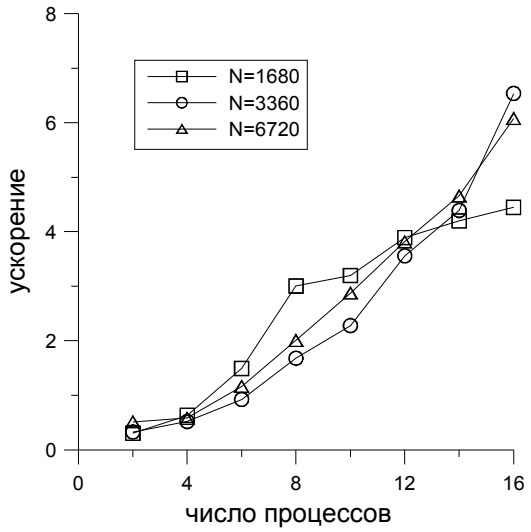

Рис. 3. Зависимость ускорения параллельного алгоритма для метода Годунова от числа процессов

На рис.2 и 3 показано ускорение параллельных алгоритмов для метода Ван Лира и метода Годунова соответственно. Для обоих методов ускорение примерно одинаково, если $p \leq 6$. При большем числе процессов параллельный алгоритм для метода Годунова имеет большее ускорение. Так, например, при $p = 16$ ускорение для метода Годунова получилось примерно в 2.5 раза выше, чем для метода Ван Лира. Из вышеуказанных рисунков видно, что при $p > 6$ увеличение числа разностных ячеек ведет к увеличению ускорения параллельного алгоритма.

Эффективность распараллеливания последовательных алгоритмов решения системы (1) показана на рис.4 и 5. Из рисунков видно, что эффективность алгоритмов невысока и не превышает 41%. Увеличение числа процессов ведет к снижению эффективности распараллеливания для метода Ван Лира (рис.4), в отличие от метода Годунова (рис.5). Такое поведение объясняется тем, что в методе Ван Лира число арифметических операций на одном шаге интегрирования гораздо меньше, чем в методе Годунова, что ведет к увеличению относительной доли временных затрат на выполнение операций обмена между процессами.

Очевидно, что при большем числе операций на одном шаге интегрирования относительная доля временных затрат на выполнение операций обмена между процессами будет уменьшаться. Поэтому при распараллеливании алгоритмов решения уравнений газовой динамики с помощью явных схем большей эффективности следует ожидать в задачах большей размерности.

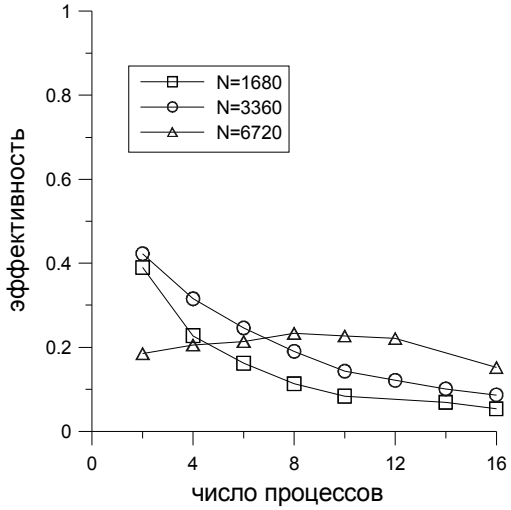

Рис. 4. Зависимость эффективности параллельного алгоритма для метода Ван Лира от числа процессов

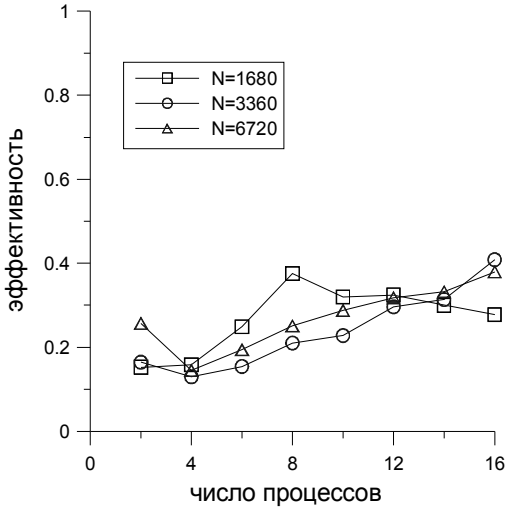

Рис. 5. Зависимость эффективности параллельного алгоритма для метода Годунова от числа процессов

2. Задача о течении газа в сопле Лаваля

Стационарное решение задачи о течении газа в сопле Лаваля находится методом установления из решения следующей нестационарной системы уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \upsilon \\ \rho E \end{pmatrix}; \; F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho \upsilon u \\ \rho H u \end{pmatrix}; \; G = \begin{pmatrix} \rho \upsilon \\ \rho \upsilon u \\ \rho \upsilon^2 + p \\ \rho H \upsilon \end{pmatrix}.$$

Начальные условия задаются из решения соответствующей одномерной задачи:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \; p = p_0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \; V = \lambda \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}};$$

$$u = V\cos\theta(x), \; \upsilon = V\sin\theta(x),$$

где $\theta(x) = \dfrac{y}{R(x)}\theta_R(x)$; $\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda\left(1 - \dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \dfrac{1}{R^2(x)}$.

Для профиля сопла использовалась зависимость [4]:

$$R(x) = \begin{cases} 3.13, & \text{если } x \in [0, 1] \\ \sqrt{1^2 - (x-1)^2} + 2.13, & \text{если } x \in (1, 1.7071] \\ -x + 4.5442, & \text{если } x \in (1.7071, 3.3612] \\ -\sqrt{0.625^2 - (x - 3.8031)^2} + 1.625, & \text{если } x \in (3.3612, 3.9649] \\ 0.2679x - 0.0409, & \text{если } x \in (3.9649, 5]. \end{cases}$$

Здесь $\theta_R(x)$ – угол между касательной к профилю сопла и осью x; ρ_0, p_0 – параметры торможения газа.

Граничные условия:

на оси симметрии: $v = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$;

на непроницаемой поверхности: $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ – условие непротекания;

на выходной границе: $p = p_a$, если $M < 1$;

во входной границе: $\frac{p}{\rho^k} = \Phi_0$; $v = 0$; $\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = H_0$.

Давление торможения принималось равным 6.2 МПа, плотность торможения 2.7 кг/м^3, отношение теплоемкостей $k = 1.4$.

Система уравнений (3) решается методом Годунова. Схема распараллеливания применяется такая же, как и для решения одномерной задачи (рис.1). Расчетная область разбивается на подобласти вдоль оси Ox. Но в отличие от одномерной задачи для обмена данными между процессами слева и справа от расчетной области, приходящейся на один процесс, вводятся не вспомогательные ячейки, а одномерные массивы, размер которых равняется количеству ячеек поперек области.

Условием окончания численного счета двумерной задачи является достижение невязки некоторого заданного значения, которая представляет собой следующую сумму:

$$\frac{1}{N*M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\left|\rho_{ij}^{n+1} - \rho_{ij}^{n}\right| + \left|u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}\right| + \left|v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^{n}\right| + \left|p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{n}\right|\right).$$

Здесь N – количество разбиений в направлении оси Ox на одном процессе; M – количество разбиений вдоль оси Oy.

Из рис.6 видно, что ускорение возрастает при увеличении числа процессов и измельчении расчетной сетки, тогда как для одномерной задачи это практически не фиксируется (рис.2,3). Это можно объяснить тем, что в одномерном случае доля временных затрат на обмен информацией между процессами может быть соизмерима с долей времени простого численного счета, т.е. не намного его меньше. Для двумерной же задачи они не настолько соизмеримы.

Пунктирными линиями на рис.6 показана теоретически полученная зависимость ускорения от числа процессов по закону Амдаля для параллельного алгоритма двумерной задачи с соответствующей долей последовательных операций f=0.1 и f=0.2. Видно, что с измельчением разностной сетки доля последовательных операций уменьшается, так как увеличивается доля параллельных операций, выполняемых каждым процессом.

Из рис.7 видно, что эффективность параллельного алгоритма возрастает с увеличением числа расчетных узлов и падает при увеличении числа процессов, за исключением p=4. Падение эффективности при увеличении числа процессов можно объяснить тем, что операции обмена на вычислительном кластере происходят медленно. Еще одной причиной падения эффективности с увеличением числа процессов является несбалансированная нагрузка процессоров в полученном параллельном алгоритме. Нулевой процессор оказывается более нагруженным, чем все остальные процессоры. Все обменные операции проходят через него. Это объясняется физической топологией кластера ТГУ – «звездой». Процессоры связаны между собой только через центральный процессор (нулевой). Также считывание из файлов разностной сетки и начальных условий и их дальнейшее разбиение и рассылка другим процессам осуществляется именно нулевым процессом.

Значение эффективности для одномерной задачи не превышает 42 %. Из этого можно сделать вывод о том, что одномерную задачу распараллеливать нерационально. В ней все-таки значителен объем обмениваемой информацией по сравнению с последовательно выполняемыми на каждом

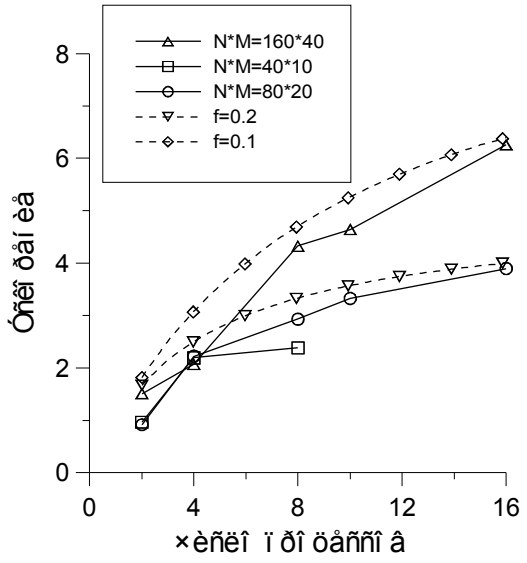

Рис. 6. Зависимость ускорения параллельного алгоритма для двумерной задачи от числа процессов

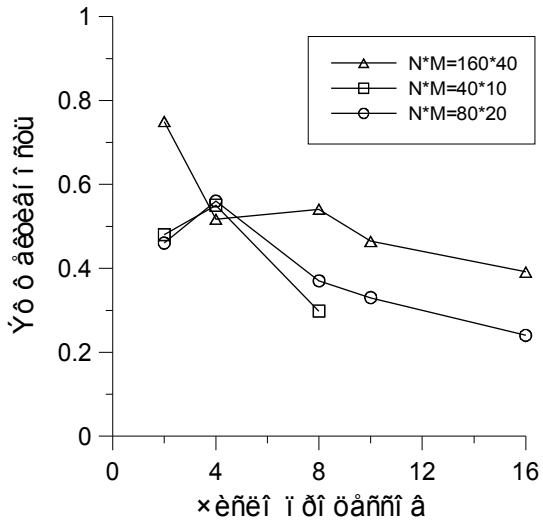

Рис. 7. Зависимость эффективности параллельного алгоритма для двумерной задачи от числа процессов

процессоре операциями.

Максимальная эффективность для двумерной задачи равна 76% . Она достигается на самой мелкой расчетной сетке 160*40 и на двух процессах.

Литература

1. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Finite Difference Scheme III. Upstream centered Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. – 1977. – Vol.7, №23. – P. 263–275.
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К.Годунова. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
3. Корнеев В.Д. Параллельное программирование в MPI. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 213 с.
4. Численные методы в механике жидкостей / Под ред. О.М. Белоцерковского. – М.: Мир, 1973. – 304 с.