ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

В.Ю. Казаков, С.В. Тимченко

Томский государственный университет, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

При решении большого числа практических задач приходится сталкиваться с необходимостью нахождения решений, удовлетворяющих нескольким, зачастую конфликтующим между собой критериям. В связи с этим решение задачи заключается не в нахождении какого-то одного решения, а в отыскании некоторого множества решений, каждое их которых будет превосходить другие хотя бы по одному критерию. Такие решения, как правило, называются оптимальными по Парето. Необходимость отыскания целого множества решений чрезвычайно усложняет задачу оптимизации и делает практически непригодными большинство классических методов оптимизации. Задача усложняется еще и тем, что надо не только найти решения, максимально близкие к истинному множеству (или фронту) Парето, но и обеспечить максимально возможное различие между такими решениями (т.е. охватить возможно большую часть этого фронта).

Один из наиболее перспективных подходов к решению данной задачи заключается в применении генетических или эволюционных алгоритмов, работающих сразу с целым набором испытаний (точек в пространстве поиска) и позволяющих находить весь фронт Парето за один проход.

1.Введение

Принципы многокритериальной оптимизации существенно отличаются от обычной оптимизации. Во втором случае (один критерий) целью решения задачи является нахождение глобального решения, дающего оптимальное значение для одной целевой функции. В случае нескольких критериев мы имеем соответственно несколько целевых функций, у каждой из которых может быть оптимальное значение при своем собственном наборе значений независимых переменных. Если оптимальные решения для различных целевых функций существенно различны, то невозможно говорить об оптимальном решении всей задачи в целом. В этом случае мы получаем множество оптимальных решений, ни одно из которых не является оптимальным по сравнению с другими во всех смыслах (т.е. по всем критери-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02-01-01022.

ям). Это множество называют множеством решений, оптимальных по Парето. Проиллюстрируем сущность многокритериальной задачи на гипотетическом примере, состоящем в удовлетворении двух критериев оптимальности – цена и качество некоторого изделия (рис.1).

Здесь по оси абсцисс откладывается условная цена некоторого изделия, а по оси ординат – величина, обратная его качеству. На этом рисунке точка *A* представляет решение, близкое к оптимальному по цене, но совершенно неудовлетворительное по качеству. Наоборот, точка *B* представляет собой изделие высокого качества, но и одновременно очень дорогое. Существуют также точки (такие, как точка *D*), принадлежащие фронту Парето, каждая из которых, превосходя какую-либо точку из этого фронта по одному критерию, обязательно уступает ей по другому.

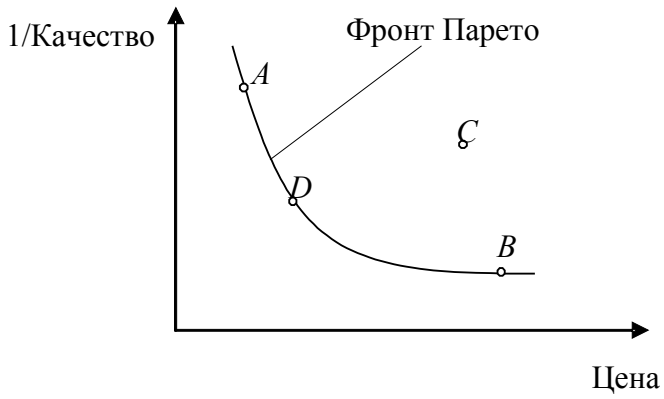

Рис. 1

Рассмотрим теперь точку, не являющуюся оптимальной по Парето (например, точку *C*). Эта точка, превосходя точку *A* по критерию качества, не является оптимальной по Парето, так как существуют решения (например, точка *D*), превосходящие эту точку по обоим критериям.

Для многокритериальной проблемы (пусть f_i – целевые функции, $i = 1,2,...,M,\ M > 1$) для любых двух точек в пространстве поиска существуют две возможности – доминирует одно решение над другим или нет. Говорят, что решение $x^{(1)}$ доминирует над решением $x^{(2)}$, если выполняются два условия:

1. Решение $x^{(1)}$ не хуже решения $x^{(2)}$, т.е. для всех целевых функций $\forall\, i : f_i(x^{(1)}) \le f_i(x^{(2)})$ (в случае задачи минимизации).

2. Решение $x^{(1)}$ строго лучше решения $x^{(2)}$ хотя бы для одной функции, т.е. $\exists\, i : f_i(x^{(1)}) < f_i(x^{(2)})$.

Таким образом, множество оптимальных по Парето решений *P* определяется таким образом, что в пространстве поиска нет решений, доминирующих над решениями из множества P.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения параметров траектории входа в атмосферу Земли, минимизирующих величину интегрального конвективного теплового потока в точке торможения затупленного тела при одновременной минимизации толщины теплозащитного покрытия. В качестве исходной математической модели для расчета теплового потока используются уравнения тонкого (гиперзвукового) вязкого ударного слоя с учетом неравновесного характера протекания химических реакций, многокомпонентной диффузии и сопряженного характера теплообмена на поверхности тела [1-3].

Задача оптимизации формулируется следующим образом: в пространстве непрерывных функций $V(t)$ и $H(t)$ (где $V(t)$ и $H(t)$ – соответственно скорость и высота полета в зависимости от времени) необходимо найти такие функции $V(t)$ и $H(t)$, чтобы достигался минимум функционала

$$Q(V, H, t_m) = \int_0^{t_m} q_w(H(t), V(t), R^*, k, ...)dt$$

при минимально возможной толщине теплозащитного покрытия. Здесь подынтегральная функция $q_w(H(t), V(t), R^*, k, ...)$ представляет собой тепловой поток в критическую точку тела, который определяется из численного решения сопряженной задачи при помощи метода [9]. Искомые функции $V(t)$ и $H(t)$ ищутся в классе линий Безье m-го порядка.

Задача решается при ограничениях на равновесную температуру поверхности $T_w(t)$, которая не должна превышать некоторого заданного значения $T_w^{\max}(t)$, и температуру внутренней поверхности оболочки $T_i(t)$, которая также не должна превышать некоторого заданного значения $T_i^{\max}(t)$

Очевидными являются требования на крайние точки искомых функций:

$$V(0) = V_0,\ H(0) = H_0,\ V^{TM} = V^*,\ H^{TM} = H^*.$$

Другие ограничения на область допустимых значений поставленной задачи могут быть получены из физического анализа задачи и являются следствиями системы уравнений динамики полета. В частности, необходимыми являются ограничение на максимально допустимую перегрузку и дополнительное ограничение на ускорение, смысл которого в том, что торможение не может быть больше торможения, вызываемого максимальной силой сопротивления для данного тела на данной высоте:

$$\left|\dot{V}(t)\right| < ag,\ \left|\dot{V}(t)\right| < S^* \rho_\infty(t) V^2(t)/(2m).$$

Для учета ограничений на допустимые решения при реализации алгоритма поиска оптимального решения использовалась модифицированная целевая функция Q^*:

$$Q^* = \begin{cases} q_1 + q_2\left(\left|\dot{V}(t)\right| / g - a\right) & if \left|\dot{V}(t)\right| > ag \\ q_3 + q_4\left(T_w^{\max} - T_w\right) / T_w^{\max} & if\ T_w > T_w^{\max} \\ q_5 + q_6\left(T_i^{\max} - T_i\right) / T_i^{\max} & if\ T_i > T_i^{\max} \\ q_7 + q_8\left(\left|\dot{V}(t)\right| / g - A(t) / g\right) & if \left|\dot{V}(t)\right| > A(t) \end{cases}$$
$$Q$$

3. Метод решения

Для решения поставленной задачи в данной работе предлагается многокритериальный асинхронный параллельный генетический алгоритм (МАПГА), являющийся развитием однокритериального алгоритма, предложенного в [2–6]. В его основе лежит ранжированная турнирная селекция, основанная на частичном упорядочивании точек в пространстве поиска. На первом этапе ранжирования (частичного упорядочивания) в текущей популяции выбираются точки, лежащие во фронте Парето, им присваивается нулевой ранг, после этого они исключаются из рассмотрения. На втором этапе в оставшейся части популяции выбираются особи, для которых нет доминирующих решений. Далее этим особям присваивается первый ранг, и они также исключаются из рассмотрения. Процесс повторяется до исчерпания популяции. После этого в процессе селекции используются не значения целевых функций, а присвоенные особям ранги.

МАПГА состоит из следующих основных шагов:

1. На основе случайного поиска на master-процессе определяется первоначальная популяция.

2. Для вычисления целевой функция индивидуумы рассылаются slave-процессам.

3. Промежуточная популяция инициализируется множеством наилучших по Парето решений из предыдущей популяции.

4. Master-процесс принимает сообщения от готовых slave-процессов и включает соответствующее решение в промежуточную популяцию. Важно отметить, что вследствие асинхронности алгоритма потомки особей из k-й генерации могут быть включены как в $k+1$-ю генерацию, так и в $k+m$-ю ($m>1$) генерацию в зависимости от времени расчета целевой функции. После этого, если промежуточная популяция полностью сформирована, она подвергается ранжированию, копируется в текущую популяцию и, если не выполняется некоторый критерий завершения итерационного процесса, то алгоритм возобновляется, начиная с 3-го шага.

5. Если популяция сформирована еще не полностью, то из предыдущей популяции при помощи оператора селекции выбираются две новые родительские особи, к которым применяются операторы скрещивания и мутации для производства новых пробных точек в пространстве поиска.

При этом, как правило, используются оператор арифметического скрещивания [8] и оператор мутации с вероятностью пропорциональной расстоянию между родительскими особями [7].

6. Для вычисления целевой функции полученные индивидуумы посылаются свободным slave-процессам, и алгоритм возобновляется, начиная с 4-го шага.

Ниже приводится краткий псевдокод описанного алгоритма.

```
t := 0
initpopulation P(t)          /* random or random + initial solution(s) */
Scatter P(t)                 /* for evaluation */
while not done do
P' := Pareto_set(P)          /* Pareto elitism */
while size(P') < size(P) do
Recv_from_j (Pi, f(Pi))
P' := P' + Pi
Pi:= selectparents P(t)      /* ranking tournament selection or ranking
                                tournament selection with sharing*/
recombine Pi          /* single point, uniform or arithmetical crossover */
mutate Pi               /* nonuniform + distance-dependent mutation */
Send_to_j(Pi)                /* for evaluation */
enddo
P(t+1) := ranking P'(t)
t := t + 1
enddo
```

Предложенный параллельный алгоритм для решения задач многокритериальной оптимизации использовался для решения описанной в п. 2 задачи. На примере задачи определения параметров оптимальной траектории входа в атмосферу Земли показано, что задача параметрического исследования может быть сведена к поиску фронта Парето в задаче много-

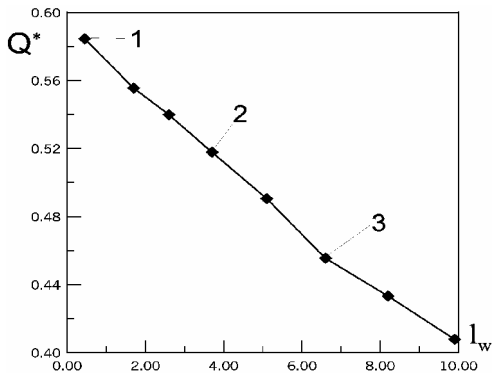

Рис. 2

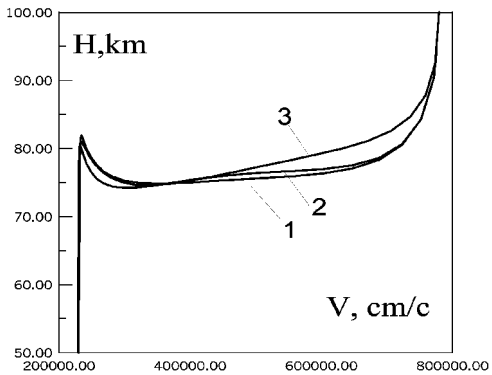

Рис. 3

критериальной оптимизации, в которой в качестве дополнительного критерия выступает ее варьируемый параметр. Проведенные расчеты показали, что данный подход позволяет существенно сократить время решения задачи. При этом параллельность алгоритма позволяет не только эффективно использовать имеющиеся вычислительные мощности, но и предотвратить стягивание фронта Парето в точку. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2-3 (кривые 1–3 на рис. 3 соответствуют точкам 1–2 на рис.2).

Литература

1. Peigin S.V.,Tirskii G.A. et al. Super- and hypersonic aerodynamics and heat transfer. – New-York: CRC Pres, 1993.
2. Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В. Оптимизация траектории входа в атмосферу Земли по интегральному тепловому потоку // ЖПМТФ. – 2000. – Т.41, № 4. – С. 112–121.
3. Peigin S.V., Desidery J.-A., Timchenko S.V. Reentry Trajectory Optimization Using Genetic Algorithms // Computational Fluid Dynamics'2000. Proc. of the Fifht European CFD Conference. – 2000. – P. 14.
4. Peigin S., Periaux J., Timchenko S. Asynchrony Parallel Genetic Algorithm for Heat Flux Optimization Problem // Parallel Computational Fluid Dynamics. Development and Applications of Parallel Technology. Elsevier Science B.V., 1999. – P. 377–384.
5. Peigin S., Mantel B., Timchenko S. et al. Application of a genetic algorithm to a heat flux optimization problem // Surveys on Mathematics for Industry. – 2000. – Vol.9, № 3.
6. Hoffmeister F., Back T. Genetic algorithms and evolution strategies: similarities and differences // Parallel Problem Solving from Nature - Proceedings of 1st Workshop. – 1991. – P. 455–469.
7. Sefioui M., Periaux J., Ganascia J.-G. Fast convergence thanks to diversity // Proc. of the 5th Annual Conference on Evolutionary Programming. – MIT Press, 1996.
8. Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. – New York: Springer-Verlag, 1992.
9. Петухов И.В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука, 1964. – С. 305–325.