Рекуррентные сплайн-фильтры

Б. М. Шумилов, Э. А. Эшаров[1]
Томский государственный университет, Томск

Исследуется задача построения рекуррентного сплайн-аппроксимационного фильтра, точного на многочленах. Представлена и обоснована вычислительная схема рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 произвольной глубины p по зашумленным данным на равномерной сетке.

Введение

Рекуррентная аппроксимация сплайнами встречается в задачах мониторинга, например в палатах интенсивной терапии, при обработке данных траекторных наблюдений, в других задачах слежения и управления. При этом весьма желательно получать результаты обработки с некоторым опережением, т. е. в режиме прогнозирование

Известно [1, с. 35], что интерполяционные сплайны дефекта 1 определяются по заданным значениям интерполируемой функции на всем отрезке наблюдения. Это усложняет обработку данных в темпе их поступления, например, требуется введение дополнительных узлов [2]. С другой стороны, использование локального сглаживания [1, с. 244] приводит к увеличению времени запаздывания в зависимости от степени сплайна и порядка аппроксимации. Поэтому ниже на основе теории сплайн-схем, точных на многочленах [3], строятся формулы рекуррентной аппроксимации сплайнами, позволяющие за счет учета предыстории обработки уменьшить время запаздывания или снизить погрешность приближения.

Общая схема. Пусть на отрезке вещественной оси [a, b] введена сетка Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Добавим узлы $x_{-n} < \ldots < x_{-1} = a$, $b = x_{N+1} < \ldots < x_N$ и образуем множество нормализованных B-сплайнов ([1, с. 23]) $\left\{B_n^i(x), i = -n, \ldots, N-1\right\}$, равных нулю вне интервалов (x_i, x_{i+1}).

[1] Работа поддержана грантами РГНФ 06-02-64202 а/Т и 07-02-94773 и/м.

Определение [4]. Рекуррентным аппроксимационным сплайном $S_n(x)$ назовем функцию вида $S_{n,v}(x)=\sum_{\alpha=0}^{n} d_i B_\alpha^i(x), a\le x\le b.$ с коэффициентами d_i, удовлетворяющими рекуррентному соотношению $d_i=\lambda_i(f)-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^i\cdot d_{i-j}$, $k=p-n,\dots N-1$ и начальным условиям $d_i=\lambda_i(f), i=-n,\dots,p-n-1.$ Здесь $\{d_i=\lambda_i(f), i=-n,\dots,N-1\}$ — множество линейных непрерывных функционалов, определенных по значениям функции $f(x)$ на [a, b] .

2. Метод рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины 1

Математическая постановка задачи: Пусть измеряемый процесс $f(t)$ регистрируется в равноотстоящие моменты времени t с шагом измерения $\Delta t/m$, причем $f(t)$ допускает адекватное представление в виде сплайна третьей степени и между соседними узлами имеется m-1 измерение. Тогда измеренные значения $y_{i,k}$ на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$, $k=0,1,\dots$, имеют вид [1]:

$$y_{i,k}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{i}{m}\right)^3 y_{k-1}+\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{i}{m}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{m}\right)^3\right]y_k+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{i}{m}+\left(\frac{i}{m}\right)^2-\left(\frac{i}{m}\right)^3\right]y_{k+1}+\frac{1}{6}\left(\frac{i}{m}\right)^3 y_{k+2}+\xi_{i,k}, \qquad (2.1)$$

где y_k — параметры сплайна, $\xi_{ik}\in\square(0,\sigma^2)$ — ошибки измерения. Для нахождения оценок $\hat{y}_k$ параметров кубического сплайна будем использовать рекуррентный алгоритм глубины 1 [5]:

$$\hat{y}_k=\ \hat{y}_{k-1}+\sum_{i=0}^{m} a_i\ y_{i,k+1}\quad k=-\ \dots \qquad (2.2)$$

Теорема 2.1. Пусть параметры алгоритма (2.2) удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i=1-\lambda,\sum_{i=0}^{m} a_i\frac{i}{m}=2\lambda-1,\sum_{i=0}^{m} a_i\left(\frac{i}{m}\right)^2=\frac{2-11\lambda}{3},\sum_{i=0}^{m} a_i\left(\frac{i}{m}\right)^3=6\lambda \qquad (2.3)$$

$$|\lambda|<1. \qquad (2.4)$$

Тогда оценки $\hat{y}_k$ вычисляются устойчивым образом и имеют дисперсию:

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sigma^2}{1-\lambda^2} \sum_{i=1}^{m} a_i^2. \qquad (2.5)$$

Сплайн, построенный в условиях теоремы 2.1, обеспечивает точность на многочленах третьей степени.

Доказательство. Проверим условия точности на многочленах третьей степени (см. лемма [5]). В обозначениях леммы имеем $\lambda_k(y) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, y_{i,k+1}$, глубина фильтра $p = 1$. Тогда для того, чтобы сплайн совпадал тождественно с $f(t)$ для любых $f(t)$ из пространства многочленов степени не выше 3, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} a_i + \lambda = 1, \\ \sum_{i=0}^{m} a_i\, t_{i,k+1} + \lambda t_{k-1} = t_k, \\ \sum_{i=0}^{m} a_i\, t_{i,k+1}^2 + \lambda\left(t_k^2 - 2t_k m + \frac{2}{3}m^2 \right) = t_k^2 - \frac{m^2}{3}. \\ \sum_{i=0}^{m} a_i\, t_{i,k+1}^3 + \lambda\left(t_k^3 - 3t_k^2 m + 2t_k m^2 \right) = t_k^3 - t_k m^2. \end{cases}$$

Здесь $t_{i,k} = t_k + \frac{i}{m}\Delta t,\ \ i = \overline{0,m}.$ Выполнение первого соотношения (2.3) очевидно, из первого равенства получим $\sum_{i=0}^{m} a_i = 1 - \lambda$. Далее, из второго равенства, после некоторых преобразований получим: $\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{i}{m} = 2\lambda - 1$. Перейдем к третьему равенству системы и, подставляя $(t_k + m + i)^2$ вместо $t_{i,k+1}^2$ и в силу доказанных первых двух равенств, получим: $2\sum_{i=0}^{m} a_i mi + \sum_{i=0}^{m} a_i m^2 + \sum_{i=0}^{m} a_i i^2 + \frac{2}{3}\lambda m^2 + \frac{m^2}{3} = 0.$

Поделив обе части полученного равенства на m^2, приходим к третьему из доказываемых условий (2.3) теоремы 2.1. Аналогично, рассматривая четвертое равенство системы, получаем последнее $\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{i}{m}\right)^3 = 6\lambda$ из соотношений (2.3). Условия (2.3) теоремы 2.1 доказаны.

Обозначим $\tilde{y}_k = \sum_{i=0}^{m} a_i y_{i,k+1}$. Тогда (2.2) можно переписать в виде

$$\hat{y}_k = \lambda \hat{y}_{k-1} + \tilde{y}_k, \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) — линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка, характеристическое уравнение которого имеет вид $z - \lambda z = 0$ корень уравнения равен λ, и выполнение условия (2.4) т. е. $|\lambda| < 1$, как известно [6], обеспечивает устойчивость решения уравнения (2.6) к влиянию начального условия $\hat{y}_{k-2}$.

Умножая левую и правую части выражения (2.1) на a_i и суммируя по $i = 0, ..., m$ и путем элементарных преобразований и с учетом условий (2.3), данное выражение принимает вид:

$$\tilde{y}_k = y_k - \lambda y_{k-1} + \sum_{i=0}^{m} a_i \xi_{i,k}, \ k = 1,2,\ldots. \tag{2.7}$$

Используя (2.7), выражение (2.6) может быть представлено в виде $\hat{y}_k - y_k = \lambda\left(\hat{y}_{k-1} - y_{k-1}\right) + \sum_{i=0}^{m} a_i \xi_{i,k}$.

Тогда

$$M\left\{\hat{y}_k - y_k\right\} = \lambda M\left\{\hat{y}_{k-1} - y_{k-1}\right\} + \sum_{i=0}^{m} a_i M\left\{\xi_{i,k}\right\}. \tag{2.8}$$

В выражении (2.8) $M\left\{\xi_{ik}\right\} = 0$ согласно постановке задачи. Таким образом, выражение (2.8) принимает окончательный вид

$$M\left\{\hat{y}_k - y_k\right\} = \lambda M\left\{\hat{y}_{k-1} - y_{k-1}\right\} \tag{2.9}$$

с тем же характеристическими уравнением, что и (2.6). Решение (2.9) асимптотически равно нулю при $|\lambda| < 1$, т. е. несмещенность решения $\hat{y}_k$ следует из его устойчивости. Для несмещенных оценок дисперсия

$$D\left\{\hat{y}_k - y_k\right\} = M\left\{\left(\hat{y}_k - y_k\right)^2\right\} \tag{2.10}$$

Тогда с учетом выражения (2.10) получаем:

$$M\left\{\left(\hat{y}_k - y_k\right)^2\right\} = \lambda^2 M\left\{\left(\hat{y}_{k-1} - y_{k-1}\right)^2\right\} + \sum_{i=0}^{m} a_i^2 \sigma^2$$

откуда при $k \to \infty$ следует $D\left\{\hat{y}_k\right\} = \dfrac{\sigma^2}{1-\lambda} \sum_{i=1}^{m} a_i^2$. Тогда при $k \to \infty$ получим (2.5). Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, получен устойчивый рекуррентный вычислительный процесс оценки параметров $\hat{y}_k$ экспериментальной зависимости, представленной в виде сплайна третьей степени. Так как остаточная дисперсия оценок зависит от коэффициентов λ, a_i и дисперсии σ^2, то естественно определить такие параметры, которые минимизировали бы величину:

$$V(\lambda)=\frac{1}{1-\lambda^2}\sum_{i=0}^{m}a_i^2 \tag{2.11}$$

удовлетворяя при этом условиям точности на многочленах (2.3) и устойчивости (2.4). Решение поставленной задачи дает следующая.

Теорема 2.2. Оптимальные параметры алгоритма (2.2), минимизирующие (2.11) при условиях (2.3) и (2.4), имеют вид:

$$\lambda=\frac{\left(19568-\sqrt{357171295}\right)}{5073},\ a_i=\alpha+\beta\frac{i}{m}+\delta\left(\frac{i}{m}\right)^2+\mu\left(\frac{i}{m}\right)^3,$$

где

$$\alpha=\frac{-8\left(244505-13\sqrt{357171295}\right)}{267m},$$

$$\beta=\frac{60\left(2358068-125\sqrt{357171295}\right)}{1691m}, \tag{2.12}$$

$$\delta=\frac{-20\left(17193047-910\sqrt{357171295}\right)}{1691m},$$

$$\mu=\frac{140\left(1607477-85\sqrt{357171295}\right)}{1691m}.$$

Доказательство. С использованием множителей Лагранжа β_1, β_2, β_3 и β_4 задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум

$$I=\frac{1}{1-\lambda^2}\sum_{i=0}^{m}a_i^2+\beta_1\left(1-\lambda-\sum_{i=0}^{m}\frac{i}{m}a_i\right)+\beta_2\left(2\lambda-1-\sum_{i=0}^{m}\frac{i}{m}a_i\right)+$$

$$+\beta_3\left(\frac{2-11\lambda}{3}-\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{i}{m}-\frac{1}{2}\right)^2\right)+\beta_4\left(6\lambda-\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{i}{m}\right)^3\right)\underset{\lambda,a_i}{\to}\min.$$

Вычисляя частные производные по варьируемым параметрам и приравнивая их к нулю, получим систему уравнений, обеспечивающих выполнение необходимых условий экстремума.

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \frac{2a_i}{1-\lambda^2} - \beta_1 - \beta_2 \frac{i}{m} - \beta_3 \left(\frac{i}{m}\right)^2 - \beta_4 \left(\frac{i}{m}\right)^3, \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{(1-\lambda^2)^2} \sum_{i=0}^{m} a_i^2 - \beta_1 + \beta_2 - \frac{11}{3}\beta_3 + 6\beta_4. \qquad (2.14)$$

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{\beta_1\left(1-\lambda^2\right)}{2}, \beta = -\frac{\beta_2\left(1-\lambda^2\right)}{2}, \delta = \frac{\beta_3\left(1-\lambda^2\right)}{2}, \mu = \frac{\beta_4\left(1-\lambda^2\right)}{2}.$$

Тогда из (2.13), учитывая введенные обозначения, получаем

$$a_i = \alpha + \beta \frac{i}{m} + \delta \left(\frac{i}{m}\right)^2 + \mu \left(\frac{i}{m}\right)^3, \qquad (2.15)$$

из (2.14):

$$\frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sum_{i=0}^{m} a_i^2 - \alpha + 2\beta - \frac{11}{3}\delta + 6\mu = 0, \qquad (2.16)$$

где α, β, δ и μ должны быть выбраны так, чтобы выполнялись (2.3) и (2.4).

Умножив (2.15) на a_i и просуммировав по i, получим

$$\sum_{i=0}^{m} a_i^2 - \alpha \sum_{i=0}^{m} a_i - \beta \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{i}{m} - \delta \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{i}{m}\right)^2 - \mu \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{i}{m}\right)^3 = 0. \qquad (2.17)$$

Далее, с учетом (2.3)

$$\sum_{i=0}^{m} a_i^2 = \alpha(1-\lambda) + \beta(2\lambda - 1) + \delta\left(\frac{2-11\lambda}{3}\right) + 6\mu\lambda. \qquad (2.18)$$

Поэтому (2.16) и (2.18) дают нам

$$\mu = \frac{1}{18}\left[3\alpha(1-\lambda) - 3\beta(2-\lambda) - \delta(2\lambda - 11)\right] \qquad (2.19)$$

Так как данные выражения трудны для анализа, найдем асимптотическое решение при $m \to \infty$. Подставляя (2.19) в (2.15), и с учетом (2.3), при $m \to \infty$ получаем систему:

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{3} + \frac{\mu}{4} = \frac{1-\lambda}{m}, \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} + \frac{\delta}{4} + \frac{\mu}{5} = \frac{2\lambda - 1}{m}, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{4} + \frac{\delta}{5} + \frac{\mu}{6} = \frac{2 - 11\lambda}{3m}, \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{5} + \frac{\delta}{6} + \frac{\mu}{7} = \frac{6\lambda}{m}. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{-8\left(244505 \pm 13\sqrt{357171295}\right)}{267m}, \\ \beta_{1,2} &= \frac{60\left(2358068 \pm 125\sqrt{357171295}\right)}{1691m}, \\ \delta_{1,2} &= \frac{-20\left(17193047 \pm 910\sqrt{357171295}\right)}{1691m}, \\ \mu_{1,2} &= \frac{140\left(1607477 \pm 85\sqrt{357171295}\right)}{1691m}, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{19568 \pm \sqrt{357171295}}{5073}. \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Так как нас интересуют из (2.20), только те λ, которые по модулю меньше 1, т. е.:

$$\lambda = \frac{\left(19568 - \sqrt{357171295}\right)}{5073}, \qquad (2.21)$$

то имеем:

$$\alpha = \frac{-8\left(244505 - 13\sqrt{357171295}\right)}{267m},$$
$$\beta = \frac{60\left(2358068 - 125\sqrt{357171295}\right)}{1691m},$$
$$\delta = \frac{-20\left(17193047 - 910\sqrt{357171295}\right)}{1691m}, \qquad (2.22)$$
$$\mu = \frac{140\left(1607477 - 85\sqrt{357171295}\right)}{1691m}.$$

Подставляя (2.22) в (2.15) имеем:

$$a_i = \frac{-8\left(244505 - 13\sqrt{357171295}\right)}{267m} +$$
$$+ \frac{60\left(2358068 - 125\sqrt{357171295}\right)i}{1691m^2} +$$
$$+ \frac{20\left(-17193047 + 910\sqrt{357171295}\right)i^2}{1691m^3} + \qquad (2.23)$$
$$+ \frac{140\left(1607477 - 85\sqrt{357171295}\right)i^3}{1691m^4}.$$

Собирая (2.21) и (2.22) или (2.23) получаем утверждение теоремы 2.2. Дисперсия, соответствующая оптимальным параметрам (2.12), имеет значение:

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\text{-8.021}\cdot 10^{-4}\sigma^2}{m^4}\left(9291190m^3 - 494m^3\sqrt{357171295} - \right.$$
$$-106113060im^2 + 5625im^2\sqrt{357171295} - 25789570i^2m -$$
$$\left.-13650i^2m\sqrt{357171295} - 168785085i^3 + 8925i^3\sqrt{357171295}\right)$$

Теорема 2.2. доказана.

3. Рекуррентная сплайн-аппроксимация степени 3 глубины 2

В отличие от предыдущего раздела, для нахождения оценок $\hat{y}_k$ параметров кубического сплайна будем использовать рекуррентный алгоритм глубины 2 [7]. Такой алгоритм можно определить согласно соотношению:

$$\hat{y}_k = \lambda \hat{y}_{k-1} + \gamma \hat{y}_{k-2} + \sum_{i=0}^{m} a_i \, y_{i,k+1}, \;\; k = 1,2,\ldots, \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. Пусть параметры алгоритма (3.1) удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{m} a_i = 1-\lambda-\gamma, \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{i}{m} = 2\lambda + 3\gamma - 1, \\ \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{i}{m}\right)^2 = \frac{2-11\lambda-26\gamma}{3}, \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{i}{m}\right)^3 = 6\lambda + 24\gamma \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$|\lambda| + |\gamma| < 1. \tag{3.3}$$

Тогда оценки $\hat{y}_k$ вычисляются устойчивым образом, являются асимптотически несмещенными и имеют дисперсию при $k \to \infty$

$$D\{\hat{y}_k\} = \frac{\sigma^2}{1-\lambda^2-\gamma^2} \sum_{i=0}^{m} a_i^2. \tag{3.4}$$

Сплайн, построенный в условиях теоремы 3.1, обеспечивает точность на многочленах третьей степени.

Доказательство теоремы 3.1 и вычисление оптимальных параметров алгоритма (3.2) для рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины 2 см в [8].

4. Рекуррентная сплайн-аппроксимация степени 3 произвольной глубины p

В отличие от ранее исследованных случаев рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины 1 и 2, для нахождения оценок параметров кубического сплайна будем использовать рекуррентный алгоритм произвольной глубины p:

$$\hat{y}_k = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \hat{y}_{k-q} + \sum_{i=0}^{m} a_i y_{i,k+1}, \quad k = p-1, p, \ldots . \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. Пусть параметры алгоритма (4.1) удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{m} a_i = 1 - \sum_{q=1}^{p} \lambda_q, \quad \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{i}{m} = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \left(1+q\right) - 1, \\
\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{i}{m}\right)^2 = \frac{2}{3} - \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \left(\frac{2+6q+3q^2}{3} \right), \\
\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{i}{m}\right)^3 = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \left(2q + 3q^2 + 3q^3\right)
\end{gathered} \tag{4.2}$$

При

$$\sum_{q=1}^{p} \left|\lambda_q\right| < 1. \tag{4.3}$$

Тогда оценки $\hat{y}_k$ вычисляются устойчивым образом и имеют конечную дисперсию

$$D\left\{\hat{y}_k\right\} = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{q=1}^{p} \lambda_q^2} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \tag{4.4}$$

Сплайн, построенный в условиях теоремы 4.1, обеспечивает точность на многочленах третьей степени.

Доказательство теоремы 4.1 для рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины p потребовало применения другой техники, основанной на теореме о диагональном преобладании, и будет опубликовано дополнительно.

5. Численные эксперименты

Приведем конкретные примеры для рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины $p = 1$.

При $m < 2$ решения не существует, так как количество параметров меньше количества условий теоремы 2.1. При $m = 2$ точки

измерения удобно располагать в узлах сплайна и по одной точке посередине между узлами сплайна. Тогда значения $t_i = 0, \frac{1}{2}, 1$. В результате имеем 4 неизвестных значения λ, α_0, α_1, α_2, для определения которых требуется решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \lambda = 1, \\ \frac{1}{2}a_1 + a_2 - 2\lambda = -1, \\ \frac{1}{4}a_1 + a_2 + \frac{11}{3}\lambda = \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{8}a_1 + a_2 - 6\lambda = 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен $-25/8$, поэтому существует единственное решение:

$$a_0 = \frac{271}{75}, a_1 = \frac{-296}{75}, a_2 = \frac{91}{75}, \lambda = \frac{3}{25}.$$

Поскольку значение $\lambda = 3/25$ по модулю <1, полученное решение полностью удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

Следующий вариант — когда точки измерения располагаются в узлах сплайна и еще по 2 точки измерения располагаются равномерно между узлами сплайна. Если для расчета коэффициентов сплайна берутся точки, соответствующие $t_i = 1/3, 2/3, 1$ то для определения 4-х неизвестных значений λ, α_1, α_2, α_3 требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1 - \lambda, \\ \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 = 2\lambda - 1, \\ \frac{1}{9}a_1 + \frac{4}{9}a_2 = \frac{2 - 11\lambda}{3}, \\ \frac{1}{27}a_1 + \frac{8}{27}a_2 = 6\lambda. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен 0,016, поэтому единственное решение существует. Однако, поскольку при этом ока-

зывается, что $\lambda = \frac{25}{144} = 0{,}174$, полученное решение полностью удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тем не менее, существует вполне приемлемый вариант, соответствующий точкам $t_i = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, в котором для определения неизвестных значений λ, α_0, α_1, α_2 требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1 - \lambda, \\ \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 = 2\lambda - 1, \\ \frac{1}{9}a_1 + \frac{4}{9}a_2 = \frac{2 - 11\lambda}{3}, \\ \frac{1}{27}a_1 + \frac{8}{27}a_2 = 6\lambda. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен $\frac{-182}{243}$, поэтому единственное решение существует $a_0 = \frac{1123}{182}, a_1 = \frac{-732}{91}, a_2 = \frac{39}{14}, \lambda = \frac{8}{91}$ и оно также полностью удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

Пусть теперь $m = 3$. В результате имеем 5 неизвестных значений λ, α_0, α_1, α_2, α_3, для определения которых требуется решить недоопределенную систему 4-х линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \lambda, \\ \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + a_3 = 2\lambda - 1, \\ \frac{1}{9}a_1 + \frac{4}{9}a_2 + a_3 = \frac{2 - 11\lambda}{3}, \\ \frac{1}{27}a_1 + \frac{8}{27}a_2 + a_3 = 6\lambda. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен $4/243$, поэтому существует общее решение, зависящее от параметра λ,

$$a_0 = -72\lambda + \frac{25}{2},\ a_1 = \frac{363}{2}\lambda - 24,\ a_2 = -156\lambda + \frac{33}{2}, a_3 = \frac{91}{2}\lambda - 4.$$

Графики полученных значений коэффициентов в зависимости от λ при $|\lambda| < 1$ представлены на рис. 1.

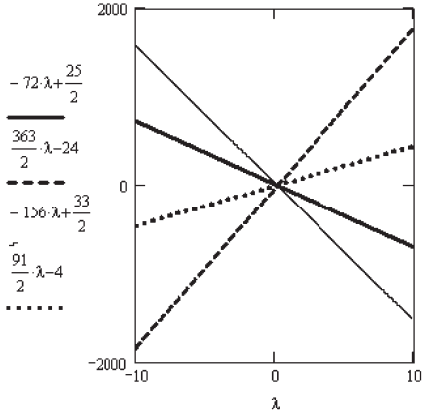


Рис. 1. Графики полученных значений коэффициентов α_0, α_1, α_2, α_3 в зависимости от λ при $|\lambda|<1$

Отметим, что к множеству полученных решений относятся и оба полученных выше решения для случая $m=3$. В силу неединственности естественно определить такой параметр, который минимизировал бы остаточную дисперсию оценок (2.13) $V(\lambda)=\frac{1}{1-\lambda^2}\sum_{i=0}^{m}a_i^2$ удовлетворяя при этом условиям точности на многочленах (2.3) и устойчивости (2.4). График функции $V(\lambda)$ представлен на рис. 2. Единственный минимум функции $V(\lambda)$ достигается при значении $\lambda=0{,}124$, $|\lambda|<1$. Соответствующие значения коэффициентов равны $a_0=3{,}577$, $a_1=-1{,}507$, $a_2=-2{,}833$, $a_3=1{,}639$.

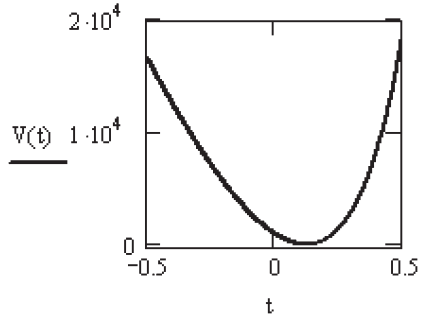


Рис. 2. Графики зависимости $V(\lambda)$ при $|\lambda|<1$

С использованием полученных выше устойчивых рекуррентных формул сплайн-прогнозирования была проделана серия численных экспериментов по аппроксимации мономов степени, меньшей или равной степени сплайна 3.

1. Было установлено, что полученные формулы обеспечивают нулевую погрешность приближения функций $f(t)=t^l$, $l=0,1,2,3$. При этом, полученные графики практически не отличаются.

2. Были проведены численные эксперименты с зашумленными функциями с нормально распределенной помехой с нулевым математическим ожиданием и с дисперсией σ^2, $\sigma=1$, 5, 10, 15. На рис. 3 приведен результат для рекуррентного сплайн-прогноза степени 3 глубины 1 для функции $f(t)=t^3$, $\sigma=10$. Оказалось, что для $\sigma\le 9$ свойства точно воспроизводить многочлены достаточно высокой степени выполняются, для $\sigma\ge 10$ фильтр не может погасить большую погрешность.

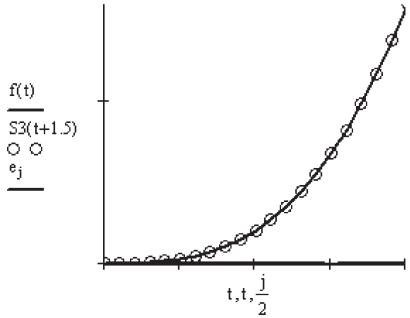


Рис. 3. Графики функций: $f(t)=t^3$, $S3(t)$ — сплайн-прогноза 3-й степени, глубины 1, e_j — помеха

3. В последней части эксперимента рассматривалось приближение многочлена степени 4, т. е. большей, чем степень сплайн-прогноза. Результирующая погрешность $S_3\left(x^{3+l},t\right)-t^{3+l}$ носит название моносплайна степени $3+1$ и в большинстве случаев имеет характерный график. Как известно, моносплайны представляют собой главный член погрешности для приближения достаточно гладких функций. Для $l=1,2$ результаты приведены на рис. 4.

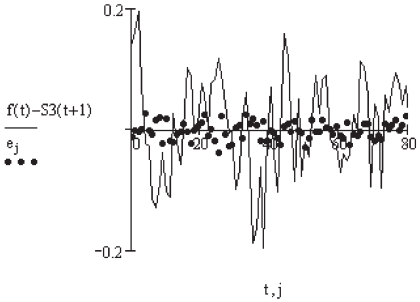


Рис. 4. Погрешность $S3(x^{3+1},t) - t^{3+1}$ для сплайна степени 3 глубины 1

4. Для случая зашумленных данных результат аналогичен предыдущему. В частности, для монома 4-й степени результат приведен на рис. 5.

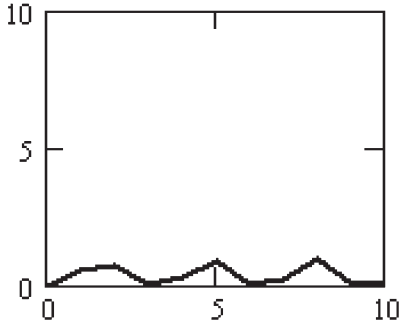


Рис. 5. Результирующая погрешность $S3(x^4+\xi,t) - t^4$ для сплайна степени 3 глубины 1

Таким образом, повышение степени фильтра благоприятно сказывается на погрешности полученных прогнозных значений при условии гладкости аппроксимируемой зависимости [9].

При $m>3$ число неизвестных параметров алгоритма (3) значительно больше, чем количество условий теоремы 2.1. Так как остаточная дисперсия оценок в условиях теоремы 2.1 при $k>>3$ зависит от параметров самого алгоритма λ, α_i и дисперсии σ^2, то естественно определить такие параметры, которые минимизировали бы величину $V = \frac{1}{1-\lambda^2}\sum_{i=0}^{m} a_i^2$, удовлетворяя при этом условиям точности на многочленах (2.3) и устойчивости (2.4). Решение

поставленной задачи в каждом конкретном случае выполняется аналогично теореме 2.2.

Литература

1. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

2. **Шумилов Б. М.** Рекуррентная интерполяция кубическими сплайнами с дополнительными узлами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1990. — Т. 29. — № 2. — С. 179—185 с.

3. **Шумилов Б. М.** Сплайн-аппроксимационные схемы, точные на многочленах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1992. — Т. 32. — № 8. — С. 1187—1196.

4. **Шумилов Б. М.** Рекуррентная аппроксимация сплайнами // Известия высших учебных заведений. — 1996. — № 1. — С. 85—87.

5. **Шумилов Б. М., Эшаров Э. А.** Метод рекуррентной сплайн-аппроксимации степени 3 глубины 1 // VI Всеросс. конф. мол. ученых по матем. моделир. и информ. технологиям (с участием иностр. ученых) : Программа и тез. докл. — Кемерово, 2005.

6. **Гельфонд А. О.** Исчисление конечных разностей. — 3-е изд., испр. — М. : Наука, 1967. — 376 с.

7. **Шумилов Б. М., Эшаров Э. А.** Рекуррентная аппроксимация глубины 2 сплайнами третьей степени// VII Всерос. конф. молодых ученых по математ. моделированию и информ. технологиям (с участиям иностр. ученых). — Красноярск, 2006. — С. 32—33.

8. **Эшаров Э. А.** Оценка погрешности и примеры рекуррентного сплайна третьей степени глубины 2 // Мат-лы XLV Международ. науч. студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск, 2007.

9. **Шумилов Б. М., Карлова И. В., Ярушкина Н. А.** Рекуррентные и прогнозирующие сплайн-фильтры 1-го и 2-го порядков // Тр. Международ. конф. по вычислит. математике МКВМ-2004. — Новосибирск : Изд-во ИВМ и МГСО РАН, 2004. — Ч. 1. — С. 152—157.