К вопросу о выборе турбулентной схемы замыкания для микромасштабных моделей городского атмосферного пограничного слоя[1]

[1]Р. Б. Нутерман, [1]А. В. Старченко, [2]А. А. Бакланов
[1]Томский государственный университет, Томск, Россия
[2]Датский метеорологический институт, Копенгаген, Дания

Введение

В настоящее время значительное внимание уделяется разработке математических моделей турбулентности для анализа и прогноза поведения метеополей вблизи больших мегаполисов. Значительное влияние на формирование приземного ветра оказывает структура подстилающей поверхности. Особенно это проявляется для участков многоэтажной городской застройки, где в уличных каньонах создаются замкнутые циркуляции приземного воздуха, способствующие накоплению повышенных концентраций вредных веществ. Важную роль в процессах рассеяния примеси играет турбулентная диффузия, поэтому для численных расчетов необходимо выбирать модели турбулентности, корректно описывающие турбулентную структуру рециркуляционного потока.

Целью данной работы является апробация трех моделей турбулентности на основе экспериментальных данных для течения за обращенным назад уступом.

Математическая постановка задачи и метод решения

В данном исследовании рассматривается стационарное турбулентное изотермическое движение воздуха. Математическая постановка задачи включает уравнения Рейнольдса [1]:

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} = 0,$$
$$\frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' u_j'}\right), \; i, j = 1,2,3 \qquad (1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке граната INTAS № 06-1000016-5928 и гранта РФФИ № 07-05-01126.

Здесь $\overline{u}_j$ — осредненные проекции вектора скорости на оси координат Ox_j; $\overline{p}$ — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость воздуха, а $\overline{u_i' u_j'}$ — компоненты тензора напряжений Рейнольдса.

Замыкание системы уравнений Рейнольдса строится на основе трех моделей: k—ε модели [1], модели нелинейной вихревой вязкости [2] и дифференциальной модели переноса напряжений Рейнольдса [3].

Линейная k—ε модель турбулентности

В этом случае замыкающие соотношения Буссинеска для системы осредненных уравнений (1) записываются в виде:

$$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k, \tag{2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; ν_T — турбулентная вязкость, а k — кинетическая энергия турбулентности. В линейной k—ε модели Лаундера и Сполдинга [1] турбулентная вязкость задается как

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3}$$

где $C_\mu = 0{,}09$ — это безразмерная константа. Кроме того, модель включает два транспортных уравнения для кинетической энергии k и для ее диссипации ε:

$$\overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G - \varepsilon, \tag{4}$$

$$\overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \left(c_{\varepsilon 1} G - c_{\varepsilon 2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{k}. \tag{5}$$

Здесь генерация энергии турбулентности

$G = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$, а константы $\sigma_k = 1{,}0$, $\sigma_\varepsilon = 1{,}3$, $c_{\varepsilon 1} = 1{,}44$, $c_{\varepsilon 2} = 1{,}92$.

Нелинейная k-ε модель турбулентности (Non-linear eddy viscosity model, NLEVM)

В соотношениях (2) представлена линейная зависимость тензора анизотропии турбулентности $a_{ij} = \dfrac{\overline{u_i' u_j'}}{k} - \dfrac{2}{3}\delta_{ij}$ от тензора скорости деформации $S_{ij} \equiv \left(\partial \overline{u}_i / \partial x_j + \partial \overline{u}_j / \partial x_i\right)$. Однако более общее соотношение для тензора a_{ij} имеет вид [2]:

$$a_{ij} = A_{ij}\left(S_{ij}, \Omega_{ij}\right)$$

где A_{ij} — тензор второго порядка, который представляет собой взаимосвязь между тензорами скорости деформации S_{ij} и завихренности $\Omega_{ij} \equiv \left(\partial \overline{u}_i / \partial x_j - \partial \overline{u}_j / \partial x_i\right)$.

Исходя из результатов исследований [2], выражение для тензора анизотропии турбулентности может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} a_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij} = -\frac{\nu_T}{k} S_{ij} + c_1 \frac{\nu_T}{\varepsilon}\left(S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{3}S_{kl}S_{kl}\delta_{ij}\right) + \\ + c_2 \frac{\nu_T}{\varepsilon}\left(\Omega_{ik}S_{kj} + \Omega_{jk}S_{ki}\right) + c_3 \frac{\nu_T}{\varepsilon}\left(\Omega_{ik}\Omega_{jk} - \frac{1}{3}\Omega_{kl}\Omega_{kl}\delta_{ij}\right) + \\ + c_4 \frac{\nu_T k}{\varepsilon^2}\left(S_{ki}\Omega_{lj} + S_{kj}\Omega_{li}\right)S_{kl} + \\ + c_5 \frac{\nu_T k}{\varepsilon^2}\left(\Omega_{il}\Omega_{lm}S_{mj} + S_{il}\Omega_{lm}\Omega_{mj} - \frac{2}{3}S_{lm}\Omega_{mn}\Omega_{nl}\delta_{ij}\right) + \\ + c_6 \frac{\nu_T k}{\varepsilon^2} S_{ij}S_{kl}S_{kl} + c_7 \frac{\nu_T k}{\varepsilon^2} S_{ij}\Omega_{kl}\Omega_{kl} \end{aligned} \qquad (6)$$

где $c_1 = 0{,}1, c_2 = 0{,}1, c_3 = 0{,}26, c_4 = -10C_\mu^2, c_5 = 0, c_6 = 5C_\mu^2, c_7 = 5C_\mu^2$. Квадратичные комбинации S и Ω необходимы для описания анизотропии нормальных напряжений в простом сдвиговом течении, а кубические члены вводятся для учета корректного воздействия кривизны линий тока и закрутки течения. В работе [2] также определяется функциональная зависимость для C_μ:

$$C_\mu = \frac{0{,}3}{1 + 0{,}35\left\{\max\left(\tilde{S}, \tilde{\Omega}\right)\right\}^{1{,}5}}\left[1 - \exp\left\{-0{,}36\exp\left\{0{,}75\max\left(\tilde{S}, \tilde{\Omega}\right)\right\}\right\}\right] \qquad (7)$$

где безразмерные инварианты деформации и завихренности определяются следующим образом:

$$\tilde{S} \equiv \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{S_{ij}S_{ij}}{2}},\ \tilde{\Omega} \equiv \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\Omega_{ij}\Omega_{ij}}{2}}$$

Максимумы $\tilde{S}$ и $\tilde{\Omega}$ используются для увеличения чувствительности модели к влиянию кривизны линий тока.

Дифференциальная модель переноса напряжений Рейнольдса (Reynolds Stress Model, RSM)

Можно получить замыкание более высокого порядка для системы (1) если использовать транспортные уравнения для каждой независимой компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Эти дифференциальные уравнения для напряжений Рейнольдса включают все физические процессы, которые влияют на корреляции второго порядка. Они способны моделировать нестационарные и нелокальные эффекты, что невозможно реализовать с помощью линейных и нелинейных двухпараметрических моделей, которые опираются на локальные градиенты скорости для расчета напряжений Рейнольдса.

Уравнения для напряжений Рейнольдса без учета перераспределение нормальных напряжений у стенки имеет вид [3, 4]:

$$\begin{aligned}\overline{u}_k \frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k} = P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}\right) - \\ -C_1\frac{\varepsilon}{k}\left[\overline{u_i'u_j'} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k\right] - C_2\left[P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P\right] - \varepsilon\delta_{ij},\end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta_k = 0{,}82$, $C_1 = 1{,}8$, $C_2 = 0{,}6$, а $P_{ij} = -\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}$, $P = \frac{1}{2}P_{kk}$, $i,j = 1,2,3$.

Граничные условия

На входной границе, где поток поступает в область исследования, граничные условия выбираются в соответствии с данными наблюдений или экспериментов, а на выходе и верхней границах используются нулевые градиентные соотношения.

Взаимодействие турбулентного потока с препятствиями и твердыми поверхностями учитывается в соответствии с методом пристенных функций Лаундера-Сполдинга [1], согласно которому касательная к поверхности компонента скорости представляется вблизи поверхности как

$$U_\tau = \frac{\tau_w}{\rho C_\mu^{1/4} \kappa k^{1/2}} \ln\left[\frac{E C_\mu^{1/4} k^{1/2} n}{\nu}\right]$$

где $\kappa = 0{,}42$, $E = 9{,}0$, τ_w — трение на поверхности, n — расстояние от обтекаемой поверхности.

Кинетическая энергия турбулентности k вблизи поверхности (в пристеночной ячейке разностной сетки с индексом P) определяется из транспортного уравнения для k (4), при этом для генерации G и диссипации ε энергии турбулентности вблизи стенки используются следующие зависимости:

$$\overline{G} = \frac{\tau_w^2}{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_n} \ln\left(\frac{y_n}{y_v}\right), \quad \overline{\varepsilon} = \frac{1}{y_n}\left[\frac{2k_P^{3/2}}{k_P^{1/2} y_v / \nu} + \frac{k_P^{3/2}}{c_l} \ln\left(\frac{y_n}{y_v}\right)\right], \quad y_v = \frac{20\nu}{k_P^{1/2}}$$

Здесь координата y_ν соответствует области вязкого подслоя пограничного слоя, а y_n области развитой турбулентности, при этом для расчетов с помощью RSM модели компоненты тензора a_{ij} выбираются постоянными в пристеночной области.

Методика решения

Задача решается численно на основе метода конечного объема [5]. Дискретизация дифференциальных уравнений осуществляется на неравномерной структурированной сетке. Для расчета интегралов используются кусочно-линейные профили, которые описывают изменение функции от одного узла разностной сетки к другому. Конвективные члены транспортных уравнений аппроксимируются с использованием монотонизированной линейной противопотоковой схемы Ван Лира [6].

Такая дискретизация дифференциальных уравнений приводит к системе сеточных уравнений, решение которых построено

на основе метода неполной факторизации Булеева [7]. Для согласования полей скорости и давления используется процедура SIMPLE Патанкара-Сполдинга [5]. Расчет параметров в областях со сложной геометрией осуществляется на основе метода фиктивных областей.

Результаты расчетов

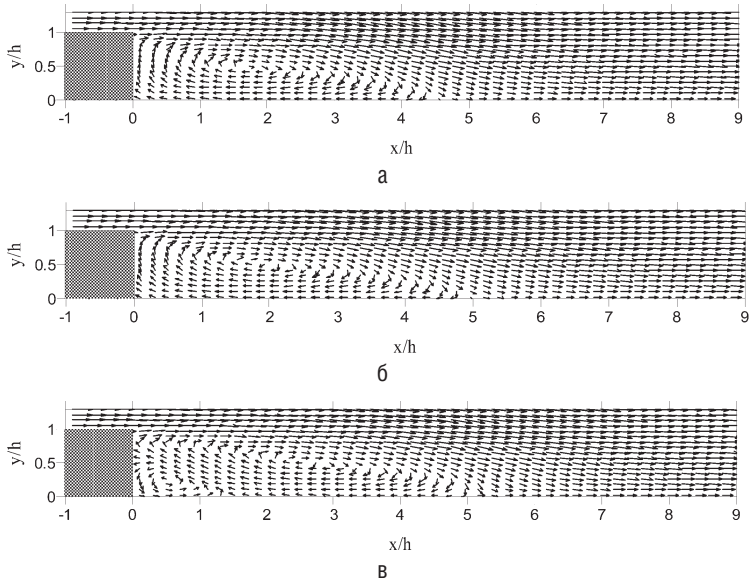


Рис. 1. Векторное поле турбулентного движения за уступом:
а) линейная k—ε модель, б) NLEVM модель, в) RSM модель

Проведено сравнение экспериментальных данных [8] с расчетами при турбулентном движении за уступом. Высота уступа $h = 0{,}076$ м, а скорость жидкости во входном сечении равна 10 м/с. Режим течения соответствует числу Рейнольдса $Re = 50\ 000$. Вычисления проводились в области размером 7 м по оси Ox и 0,5 м по оси Oy на сетке размером 231×177.

При этом расчеты осуществлялись для трех различных моделей турбулентности. Ниже представлены векторное поле скорости турбулентного движения за уступом (рис. 1 а, б, в), график изменения коэффициента давления (рис. 2), безразмерная

скорость и кинетическая энергия турбулентности вниз по потоку за уступом (рис. 3 а, б).

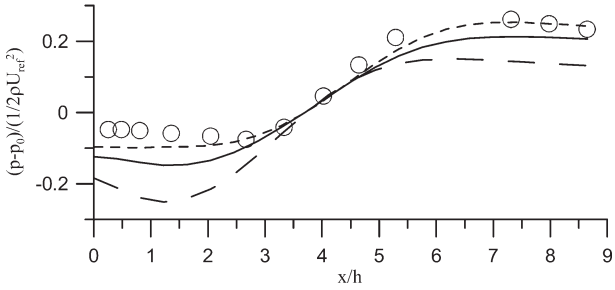


Рис. 2. Распределение коэффициента давления за обращенным назад уступом: — — — линейная k—ε модель, — NLEVM, --- RSM, o — эксперимент [8]

Сравнение трех моделей показывает превосходство RSM модели над всеми остальными и, в особенности, над линейной k—ε. Видно, что коэффициент давления внутри рециркуляционной области предсказывается k—ε моделями хуже, чем RSM (рис. 2). По-видимому, вследствие этого вблизи стенки модуль рассчитанной по k—ε модели скорости при $x/h \leq 2$ имеет большее по сравнению с экспериментом значение (рис. 3а).

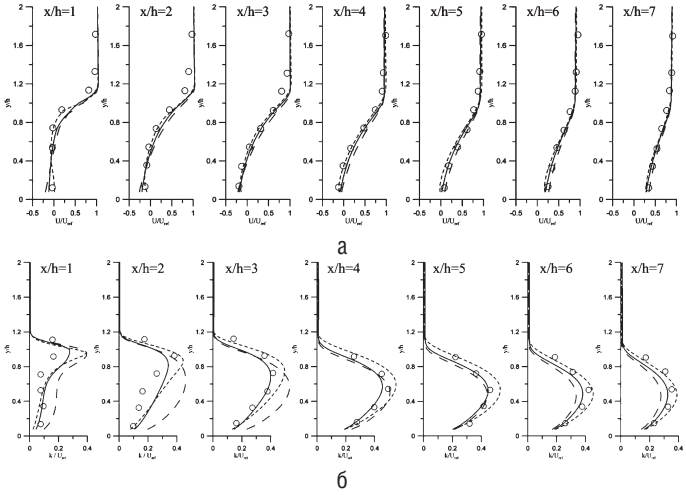


Рис. 3. Профили скорости (а) и кинетической энергии турбулентности (б) за уступом; — – — линейная k—ε модель, — NLEVM модель, --- RSM модель, o — эксперимент [8]

Кроме того, при расчетах по стандартной [1] и нелинейной [2] k—ε модели не наблюдается образования вторичного вихря в нижнем углу за уступом (рис. 1). Тем не менее, нелинейная модель вихревой вязкости значительно лучше стандартной k—ε модели предсказывает осредненные величины потока (рис. 2, 3).

Относительно моделирования турбулентных параметров можно сказать, что использование стандартной k—ε модели [1] завышает уровень кинетической энергии в застойной области течения (рис. 3б) $x/h \leq 3$, где наблюдается вторичная рециркуляция, и недооценивает его вниз по потоку за точкой присоединения $x/h \geq 6$. Этот недостаток в значительно меньшей степени проявляется у нелинейной модели вихревой вязкости.

Если сравнивать временные затраты численного расчета представленного выше течения, то RSM модель по этой характеристике уступает остальным двум моделям на 30—40 %. Кроме того, использование RSM модели может сопровождаться локальной численной неустойчивостью, что, в свою очередь, является недостатком модели. Таким образом, нелинейная k—ε модель [2] может рассматриваться в качестве модели, обеспечивающей более адекватное воспроизведение турбулентного рециркуляционного течения, чем стандартная k—ε модель [1]. В тоже время, нелинейная k—ε модель [2] может использоваться при расчете сложных трехмерных течений в элементах городской застройки, поскольку она требует меньших затрат ЭВМ по сравнению с RSM подходом при незначительном ухудшении качества расчетов.

Заключение

Представлены результаты сравнения трех моделей турбулентности на основе экспериментальных данных для течения за обращенным назад уступом. Несмотря на кажущуюся простоту данного расчетного случая, в нем присутствуют сложные эффекты, такие как отрыв потока и его присоединение, рециркуляционные и застойные области, которые порой не способны учесть обычные двухпараметрические модели.

На основе расчетов можно сделать вывод о том, что использование транспортных уравнений для напряжений Рейнольдса является более трудоемким с точки зрения расчетного времени, но позволяет хорошо предсказывать тонкие эффекты, которые

могут сказываться на процессах переноса. Нелинейная k—ε модель может рассматриваться в качестве вынужденной альтернативы RSM модели для расчета трехмерных течений в уличных каньонах.

Литература

1. **Launder B. E., Spalding D. B.** The numerical computation of turbulent flows // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1974. — Vol. 3. — № 2. — P. 269—289.

2. **Craft T. J., Launder B. E., Suga K.** Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence // Int. J. Heat and Fluid Flow. — 1996. — Vol. 17. — P. 108—115.

3. **Gibson M. M., Launder B. E.** Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer // J. Fluid Mech. — 1978. — Vol. 86. — P. 491—511.

4. **Launder B. E.** Second-Moment Closure and Its Use in Modeling Turbulent Industrial Flows // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1989. — Vol. 9. — P. 963—985.

5. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.

6. **Van Leer B.** Towards the Ultimate Concervative Difference Scheme. II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme // Journal of Computational Physics. — 1974. — Vol. 14. — P. 361—370.

7. **Ильин В. П.** Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. — М. : Физматлит, 1995. — 288 с.

8. **Мосс В. Д., Бэкер С., Брэдбери Л. Дж. С.** Измерения средней скорости и рейнольдсовых напряжений в некоторых областях рециркулирующих течений // Турбулентные сдвиговые течения 1 // Пер. А. В. Колесникова и др. [Сб. ст.] Пер. с англ. под ред. А. С. Гиневского. — М. : Машиностроение, 1982. — 432 с.