Моделирование распространения крупномасштабных волн в морях и океанах с параллельной реализацией

Л .П. Каменщиков, Е. Д. Карепова, В. В. Шайдуров
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск

Для практики важно уметь точно и оперативно прогнозировать поведение крупномасштабных гравитационных поверхностных волн, возникающих в морях и океанах (цунами, приливные течения и т. п.). Данная задача в пределах приемлемой точности хорошо описывается уравнениями мелкой воды.

Пусть (r, λ, θ) — стандартная сферическая система координат с началом в центре земного шара. Далее будем использовать вместо угла θ географическую широту $\varphi = \pi - \theta$, так что $0 \le \varphi \le \pi$. Через λ обозначим географическую долготу $0 \le \lambda \le 2\pi$. Полагаем всюду $r = R_E$, где R_E — радиус Земли, который считается постоянным. Пусть Ω — заданная область на сфере с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — часть границы, проходящая вдоль берега, а $\Gamma_2 = \Gamma$, Γ — часть границы, проходящая по морю. Обозначим через m_1 и m_2 — характеристические функции соответствующих участков границы. Для простоты считается, что точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (полюса) не входят в Ω. Относительно неизвестных функций $u = u(t, \lambda, \varphi)$, $v = v(t, \lambda, \varphi)$ и $\xi = \xi(t, \lambda, \varphi)$ запишем в $\Omega \times (0, T)$ уравнения баланса импульсов и уравнение неразрывности [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= lv + mg\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} - R_f u + f_1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -lu + ng\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - R_f v + f_2, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= m\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}(Hu) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{n}{m}Hv\right)\right) + f_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где u, v — компоненты вектора скорости U по осям λ и φ соответственно; ξ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня; $H(\lambda, \varphi) > 0$ — глубина водоема в точке (λ, φ);

функция $R_f = r_+ |U| / H$ учитывает силу трения о дно, r_+ — коэффициент трения; $l = -2\omega\cos\varphi$ — параметр Кориолиса; $m = 1/(R_E \sin\varphi)$; $m = 1/R_E$; g — ускорение силы тяжести; $f_1 = f_1(t,\lambda,\varphi)$, $f_2 = f_2(t,\lambda,\varphi)$ и $f_3 = f_3(t,\lambda,\varphi)$ — заданные функции внешних воздействий.

Граничные условия рассмотрим в следующем виде:

$$HU_n + \beta m_2 \sqrt{gH}\xi = m_2 \sqrt{gH} d \text{ на } \Gamma \times (0,T), \tag{2}$$

где $U_n = U \cdot n$, $n = \left(n_1 \frac{n}{m} n_2\right)$ — вектор внешней нормали к границе; $\beta \in [0,1]$ — заданный параметр, $d = d(t,\lambda,\varphi)$ — граничная функция, которая либо задана на границе Γ_2 (прямая задача), либо подлежит определению одновременно с решением (тогда требуется задать дополнительные данные). Для корректной постановки задачи рассмотрим также начальные условия:

$$u(0,\lambda,\varphi) = u_0(\lambda,\varphi),\ v(0,\lambda,\varphi) = v_0(\lambda,\varphi),\ \xi(0,\lambda,\varphi) = \xi_0(\lambda,\varphi)$$

Для дискретизации по времени разобьем временной отрезок $[0,T]$на K интервалов: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_K = T$ с шагом $\tau = T/K$, аппроксимируем производные по времени левыми разностями. В результате система (1)—(2) на каждом временном интервале (t_k, t_{k+1})имеет вид:

$$\left(\frac{1}{\tau} + R_f\right)u - lv - mg\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = f_1 + \frac{1}{\tau}u^k \text{ в } \Omega,$$

$$\left(\frac{l}{\tau} + R_f\right)v - lu - ng\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = f_2 + \frac{l}{\tau}v^k, \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\tau}\xi - m\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}(Hu) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{n}{m}Hv\right)\right) = f_3 + \frac{1}{\tau}\xi^k \text{ в } \Omega$$

$$HU_n + \beta m_2 \sqrt{gH}\xi = m_2 \sqrt{gH} d \text{ на } \Gamma, k = 0,1,\ldots,K-1 \tag{4}$$

где $f(t_k,\lambda,\varphi) = f^k$, $f(t_{k+1},\lambda,\varphi) = f^{k+1} = f$, донное трение берется с предыдущего слоя по времени $Rf = r_+ |U_k| / H$. Индекс $k+1$ в разностных выражениях далее будем опускать там, где это не вызывает двойного толкования.

Систему (3) также можно записать в операторном виде:

$$L\Phi = F \tag{5}$$

где L — дифференциальный оператор системы (3), $F = \left(f_1 + \frac{1}{\tau} u^k, f_2 + \frac{1}{\tau} v^k, f_3 + \frac{1}{\tau} \xi^k \right)^T$.

Для решения системы (3)—(4) применим метод Галеркина. Для этого разобьем область Ω на некоторое число N_{el} треугольных элементов, т. е. $\Omega = \bigcup_{k=1}^{N_{el}} \Delta_k$. Пусть N_{nd} — число узлов полученной сетки. Рассмотрим множество базисных функций $\left\{ \Psi_j(\lambda, \varphi) \right\}_{j=1}^{N_{nd}}$, равных единице в j-ом узле, равных нулю во всех остальных узлах и линейных на каждом треугольном элементе. Для каждого фиксированного $t = t^{n+1}$ ищем решение в виде:

$$\Phi\left(\lambda, \varphi, t^{n+1}\right) = \sum_{j=1}^{N_{nd}} \alpha_j^{\Phi}\left(t^{n+1}\right) \Psi_j(\lambda, \varphi), \ \Phi = (u, v, \xi) \tag{6}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_j^{\Phi}\left(t^{n+1}\right)$ определяем из требования ортогональности каждой из трех невязок $R_{\Phi}\left(\lambda, \varphi, t^{n+1}\right)$ всем базисным функциям:

$$\iint_{\Omega} R_{\Phi}\left(\lambda, \varphi, t^{n+1}\right) \Psi_j(\lambda, \varphi) d\Omega = 0, \ j = 1, ..., N_{nd} \tag{7}$$

В результате получаем систему линейных уравнений

$$A\Phi = B$$

относительно $3N_{nd}$ неизвестных $\left(\alpha_j^u, \alpha_j^v, \alpha_j^{\xi} \right)$. Для ее решение используем метод Гаусса-Зейделя:

$$\Phi_j^{(v+j)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{\substack{i \in Nb(j) \\ i<j}} a_{ij} \Phi_j^{(v+1)} - \sum_{\substack{i \in Nb(j) \\ i>j}} a_{ij} \Phi_j^{(v)} \right), \ j = 1, ..., 3N_{nd} \tag{8}$$

где $Nd(j)$ — множество узлов, состоящее из узла j и всех соседних к нему, т. е. соединенных с j-м узлом стороной кого-либо треугольника, v — номер итерации.

Для построения параллельного приложения используется параллелизм по данным, т. е. все множество узлов разбивается на непересекающиеся подмножества индексов j, и организуется па-

раллельное выполнение итерации в (8) для каждого подмножества. При вычислении сумм вида $\sum_{i \in Nb(j)}$, входящих в (8), некоторые из требующихся узлов могут оказаться на другом процессоре. Для доступа к ним на каждом процессоре организуются вспомогательные массивы, которые и играют роль соседних узлов, физически располагающихся в момент нахождения упомянутых сумм на другом процессоре. Сообщения между процессорами для обновления вспомогательных массивов проводятся перед очередной итерацией метода Гаусса-Зейделя.

Программы написаны на языке Fortran-DVM, разработанного в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Расчеты проводились на кластере MVS-15000BM, построенном на основе 1148 процессоров PowerPC970 2.2 ГГц, объединенных коммуникационной сетью Myrinet, с пиковой производительностью 10102.4 Gflops, а на тесте Linpack, показавшей производительность 6645.53 Gflops.

В качестве примера параллельных расчетов рассмотрим решение исходной системы на сетке 201×201 с выполнением 1000 шагов по времени. Здесь Ω есть квадрат на земной сфере со стороной 2000 км. В табл. 1 приведены характеристики расчетов при разном числе процессоров, где использованы следующие обозначения: P — число процессоров, t_P — время счета на P процессорах; S — коэффициент ускорения; E — коэффициент эффективности.

Таблица 1

P	1	2	3	4	6	8	10	12	16
t_P, мин	26,71	14,45	9,57	7,51	5,30	4,21	3,57	3,18	2,66
$S = t_1 / t_P$	1,00	1,85	2,79	3,55	5,04	6,35	7,48	8,41	10,04
$E_1 = S / P$	1,00	0,92	0,93	0,89	0,84	0,79	0,75	0,70	0,63

Рис. 1 и 2 демонстрируют результаты решения прямой задачи о распространении локального возмущения в акватории Охотского моря[1].

[1] Сетки для Охотского моря и Мирового океана подготовлены С. Ф. Пятаевым и И. В. Киреевым

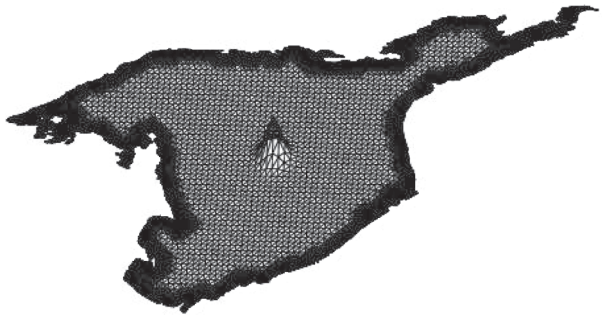


Рис. 1. Вид поверхности в момент $t = 0$

Поскольку в общем случае функция d неизвестна, то для замыкания задачи (3)—(4) следует задать дополнительное условие. Пусть Γ_0 — часть «жидкой» границы $(\Gamma_0 \subset \Gamma_2)$ с характеристической функцией m_0. Пусть на Γ_0 заданы данные наблюдений:

$$m_0 \xi = m_0 \xi_{obs}, \tag{9}$$

где ξ_{obs} — заданная функция. Тогда задача на усвоение данных может быть сформулирована следующим образом [1].

Пусть ξ_{obs} задана на Γ_0, функция d неизвестна на Γ_2 и равна нулю на Γ_1. Найти u, v, ξ, d, удовлетворяющие системе (3), граничному условию (4) и условию замыкания (9).

Эта задача имеет классическое решение в редких случаях, поэтому согласно [2] рассмотрим следующее семейство задач оптимального управления.

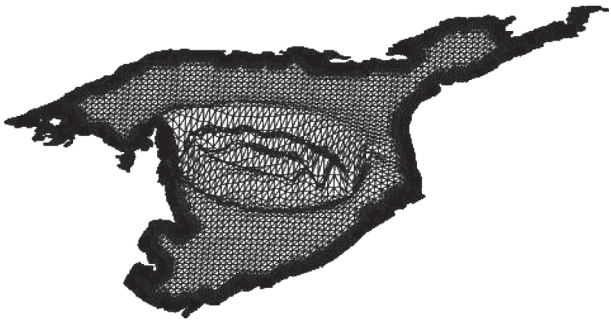


Рис. 2. Момент $t = 67$ мин.

Дано α_0. Пусть ξobs задана на Γ_0. Найти $\Phi_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha, \xi_\alpha)$, d_α,

удовлетворяющие системе

$$L\Phi_\alpha = F \text{ в } \Omega$$

граничному условию

$$HU_{\alpha^n} + \beta m_2 \sqrt{gH}\xi_\alpha = m_2\sqrt{gH}d_\alpha \text{ на } \Gamma,$$

и минимизирующие функционал стоимости

$$J_\alpha\left(d_\alpha, \xi_\alpha\left(d_\alpha\right)\right) = \frac{1}{2} gR_E\left(\alpha\int_\Gamma m_2\sqrt{gH}d_\alpha^2 ds + \int_\Gamma m_0\sqrt{gH}\left(\xi_\alpha - \xi_{obs}\right)^2 ds\right)$$

Согласно [2] каждое решение d_α этой задачи удовлетворяет следующей системе вариационных уравнений:

$$L\Phi_\alpha = F \text{ в } \Omega,\ HU_{\alpha^n} + \beta m_2\sqrt{gH}\xi_\alpha = m_2\sqrt{gH}d_\alpha \text{ на } \Gamma, \quad (10)$$

$$L^+\hat{\Phi}_\alpha = 0 \text{ в } \Omega,\ H\hat{U}_{\alpha n} + \beta m_2\sqrt{gH}\hat{\xi}_\alpha = m_0\sqrt{gH}\left(\xi_\alpha - \xi_{obs}\right) \text{ на } \Gamma, \quad (11)$$

$$\alpha m_2 d_\alpha + m_2\hat{\hat{\xi}}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma \quad (12)$$

где L^+ — сопряженный к L оператор.

Для отыскания решения u^{k+1}, v^{k+1}, ξ^{k+1}, d^{k+1}, на каждом k-ом временном шаге в [1] предложено использовать итерационный алгоритм.

1. Зададимся некоторым $d_\alpha^{(0)}$ на Γ_2. Здесь и далее по алгоритму в верхнем индексе в скобках указывается номер итерации. Положим $u_\alpha^k = u^k, v_\alpha^k = v^k, \xi_\alpha^k = \xi^k$.

2. Пока

$$\left\|\gamma_l\left(\alpha d_\alpha^{(l)} + \hat{\xi}_\alpha^{(l)}\right)\right\| \geq \varepsilon \quad (13)$$

выполняется следующий шаг итерации. Здесь под нормой понимается дискретный аналог равномерной нормы, γ_p α — параметры метода, ε — заданная точность.

2.1. Решая прямую задачу (10), находим $u_\alpha^{(l)}, v_\alpha^{(l)}, \xi_\alpha^{(l)}$ (индекс $k+1$ опущен).

2.2. Используя $\xi_\alpha^{(l)}$, решаем обратную задачу (11) и находим $\hat{u}_\alpha^{(l)}, \hat{v}_\alpha^{(l)}, \hat{\xi}_\alpha^{(l)}$.

2.3. Используем (12) для итерационного уточнения $d_\alpha^{(l)}$:

$$d_\alpha^{(l+1)} = d_\alpha^{(l)} - \gamma_l \left(\alpha d\, d_\alpha^{(l)} + \hat{\xi}_\alpha^{(l)} \right). \qquad (14)$$

2.4. Переходим на пункт с $d_\alpha^{(l)} = d_\alpha^{(l+1)}$, $l = l + 1$.

После M шагов итерационного процесса будут определены $u^{k+1} \approx u_\alpha^{(M)}, v^{k+1} \approx v_\alpha^{(M)}, \xi^{k+1} \approx \xi_\alpha^{(M)}$.

Были проведены тестовые расчеты для акватории Мирового океана по следующей схеме.

(1) Задаем граничную функцию в виде $d = 2\sin\lambda$, где $0 \le \lambda \le 2\pi$.

(2) При таком d решаем прямую задачу до некоторого момента t_1 и запоминаем значение $\xi = \xi\big|_{\Gamma_2}$ на момент t_1.

(3) Приняв полученные значения $\xi = \xi\big|_{\Gamma_2}$ за данные наблюдений $\xi_{obs} = \xi\big|_{\Gamma_2}$, восстанавливаем функцию d согласно приведенному выше алгоритму (начиная с $d = 0$).

На рис. 3 изображены заданная d и восстановленная граничная функция d_{approx} после 300 итераций. Показано, что по мере роста числа итераций максимальный (по всей границе Γ_2) модуль разницы между восстановленной функцией d и заданной стремится к нулю.

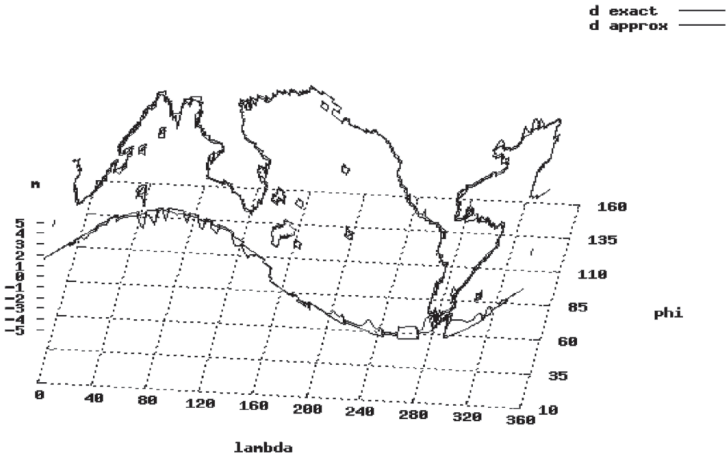


Рис. 3. Вид заданной и восстановленной функции d на границах Мирового океана

В табл. 2 показаны затраты времени на одном временном шаге при разном числе процессоров. Потребовалось 647 итераций для восстановления d с точностью 10^{-3} м.

Таблица 2

P	1	2	4
t_P, мин	902,98	479,06	275,07
$S = t_1 / t_P$	1,00	1,88	3,28
$E_1 = S / P$	1,00	0,94	0,82

Литература

1. **Agoshkov V. I.** Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2005. — Vol. 20. — № 1. — P. 1–18.

2. **Агошков В. И.** Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М. : ИВМ РАН, 2003. — 256 с.

3. **Kamenshchikov L. P., Karepova E. D., Shaidurov V. V.** Simulation of surface waves in basins by the finite element method // Russian J. On Numerical Analysis and Mathematical Modelling — 2006. — Vol. 21. — № 4. — P. 305–320.