Распараллеливание вычислений при построении гиперболических сплайнов[1]

Б. И. Квасов
Институт вычислительных технологий СО РАН
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 6

Задача построения изогеометрического гиперболического сплайна может быть сформулирована как дифференциальная многоточечная краевая задача (ДМКЗ). Ее дискретизация приводит к необходимости решения линейной системы с пятидиагональной матрицей. Прямое расщепление этой системы на цепочку трехдиагональных систем дает систему, коэффициенты которой вычисляются с помощью гиперболических функций. В работе показано, что применение алгоритма распараллеливания прогонки позволяет избежать этой трудности. Приведены числовые примеры.

Введение

В настоящее время основным аппаратом компьютерной геометрии [1—3] при описании сложных кривых и поверхностей являются методы сплайн-функций [4—6]. Вычерчивание кривых и поверхностей по дискретным данным требует наличия сплайновых методов, которые сохраняли бы геометрические свойства исходных данных такие, как положительность, монотонность, выпуклость и т. д. Стандартные методы сплайн-интерполяции не дают удовлетворительного решения этой задачи. Задача построения по дискретным данным сложных кривых и поверхностей с сохранением их формы называется задачей изогеометрической интерполяции.

Введенные в рассмотрение Швайкертом в 1966 г. [7] гиперболические сплайны с натяжением остаются до сих пор весьма популярным аппаратом решения задачи изогеометрической интерполяции [8—10]. Такие сплайны обладают достаточными для многих приложений свойствами гладкости и в сочетании

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 06-01-00030.

с алгоритмами автоматического выбора параметров натяжения [5, 11, 12] хорошо адаптируют поведение сплайна по отношению к данным. К сожалению, задача вычисления значений гиперболических сплайнов из-за ошибок округления (при малых значениях параметров натяжения) и проблем переполнения (при больших значениях параметров натяжения) является очень трудной.

В работах [5, 10] рассматривался сеточный метод табуляции гиперболических сплайнов, основанный на решении пятидиагональной линейной системы, который не требует вычисления значений гиперболических функций. Расщепление этой системы на трехдиагональные системы приводило к необходимости вычисления гиперболических функций. В данной работе показано, что табуляцию гиперболических сплайнов без вычисления значений гиперболических функций можно выполнить путем решения как трех- так и пятидиагональных линейных систем. Приводимые алгоритмы допускают эффективное распараллеливание для многопроцессорных ЭВМ. Особенности и преимущества предлагаемой методики иллюстрируются на примерах решения задачи изогеометрической интерполяции.

1. Постановка задачи

Пусть имеются данные

$$(x_i, f_i),\ i = 0,1,\ ...,\ N+1 \tag{1}$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$. Положим

$$f[x_i, x_{i+1}] = (f_{i+1} - f_i)/h_i,\ h_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0,1,\ ...,\ N$$

Данные (1) будем называть монотонно возрастающими, если

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq 0,\ i = 0,1,\ ...,\ N$$

и выпуклыми, если

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq f[x_{i-1}, x_i],\ i = 1,2,\ ...,\ N$$

Задача изогеометрической интерполяции состоит в построении достаточно гладкой функции S такой, что $S(x_i) = f_i$, $i = 0,1,\ ...,\ N+1$, и S монотонна/выпукла на участках монотонности/выпуклости исходных данных.

Очевидно, что решение задачи изогеометрической интерполяции не единственно. Будем искать решение этой задачи в виде гиперболического сплайна с натяжением.

Определение 1. Интерполяционным гиперболическим сплайном S с множеством параметров натяжения $\{p_i \geq 0,\ i = 0,1,\ ...,\ N\}$ назовем решением дифференциальной многоточечной краевой задачи (сокращенно ДМКЗ):

$$\frac{d^4 S}{dx^4} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \frac{d^2 S}{dx^2} = 0 \text{ для всех } x \in (x_i, x_{i+1}),\ i = 0,1,\ ...,\ N, \qquad (2)$$

$$S \in C^2[a, b] \qquad (3)$$

с условиями интерполяции

$$S(x_i) = f_i,\ i = 0,1,\ ...,\ N+1 \qquad (4)$$

и краевыми условиями

$$S''(a) = F_0'' \text{ и } S''(b) = F_{N+1}''. \qquad (5)$$

Краевые условия (5) используются здесь для простоты изложения. Могут быть рассмотрены краевые условия и других типов [5] $i = 1,2,...,N, [x_i, x_{i+1}]\ j = -1,0,...,n_i + 1 n \in \mathrm{N}\ \tau_i = h_i / n_i$.

2. Конечно-разностная аппроксимация

Рассмотрим теперь дискретизацию сформулированной ДМКЗ. Для этого на каждом подотрезке введем дополнительную равномерную сетку с шагом, и узлами $x_{ij} = x_i + j\tau_i,\ i = 0,1,...,N$. Будем искать сеточную функцию

$$\{u_{ij},\ j = -1,0,...,n_i + 1,\ i = 0,1,...,N\}$$

удовлетворяющую разностным уравнениям

$$\left[\Lambda_i^2 - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \Lambda_i\right] u_{ij} = 0,\ j = 1,2,...,n_i - 1,\ i = 0,1,...,N, \qquad (6)$$

где

$$\Lambda_i u_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\tau_i^2}$$

Аппроксимация условий гладкости (3) дает соотношения

$$u_{i-1,n_{i-1}} = u_{i0}$$

$$\frac{u_{i-1,n_{i-1}+1} - u_{i-1,n_{i-1}-1}}{2\tau_{i-1}} = \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2\tau_i},\ \Lambda_{i-1}u_{i-1,n_{i-1}} = \Lambda_i u_{i,0} \tag{7}$$

Условия (4) и (5) преобразуются к виду

$$u_{i0} = f_i, i = 0,1,...,N,\ u_{N,n_N} = f_{N+1} \tag{8}$$

и

$$\Lambda_0 u_{0,0} = f_0^{''},\ \Lambda_N u_{N,n_N} = f_{N+1}^{''} \tag{9}$$

Соотношения (7) и краевые условия (9) позволяют исключить «лишние» неизвестные $u_{i,-1}, u_{i,n_i+1}, i = 0,1,...,N$. Дискретное сеточное решение теперь будет определено как

$$\left\{u_{ij},\ j = 1,0,...,n_i, i = 0,1,...,N\right\} \tag{10}$$

Существование и единственность решения полученной линейной системы (6)—(9) будут доказаны в следующем пункте. Обсуждение практических аспектов прямого решения этой пятидиагональной системы проведено в [5]. Нахождение ее решения (10) не требует вычисления значений гиперболических функций.

3. Расщепление системы и продолжение сеточного решения

Для изучения решения системы (6)—(9) введем обозначение

$$m_{ij} = \Lambda_i u_{ij},\ j = 0,1,...,n_i, i = 0,1,...,N \tag{11}$$

Тогда на отрезке $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ разностные уравнения (6) принимают вид

$$\begin{gathered} m_{i0} = m_i \\ \frac{m_{i,j-1} - 2m_{i,j} + m_{i,j+1}}{\tau_i^2} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 m_{i,j} = 0,\ j = 1,2,...,n_i - 1 \\ m_{i,n_i} = m_{i+1} \end{gathered} \tag{12}$$

где m_i и m_{i+1} — заданные числа. Система (12) имеет единственное решение, которое может быть записано следующим образом:

$$m_{ij} = M_i\left(x_{ij}\right),\ j = 0,1,\ldots,n_i$$

где

$$M_i(x) = m_i \frac{\mathrm{sh}\left(k_i(1-t)\right)}{\mathrm{sh}\left(k_i\right)} + m_{i+1}\frac{\mathrm{sh}\left(k_i t\right)}{\mathrm{sh}\left(k_i\right)},\ t = \frac{x - x_i}{h_i} \qquad (13)$$

Параметры k_i являются решениями трансцендентных уравнений

$$2n_i sh\frac{k_i}{2n_i} = p_i,\ \ p_i \geq 0$$

т. е.

$$k_i = 2n_i \ln\left(\frac{p_i}{2n_i} + \sqrt{\left(\frac{p_i}{2n_i}\right)^2 + 1}\right) \geq 0,\ i = 0,1,\ldots,N$$

В силу соотношений (11) и с учетом условий интерполяции (8) имеем

$$u_{i0} = f_i$$

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\tau_i^2} = m_{i,j},\ j = 0,1,\ldots,n_i \qquad (14)$$

$$m_{i,n_i} = f_{i+1}.$$

Для всякой последовательности $m_{i,j}$, $j = 0,1,\ldots,n_i$, система (14) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$u_{ij} = U_i(x_{ij}),\ j = -1,0,\ldots,n_i + 1$$

где

$$U_i(x) = f_i(1-t) + f_{i+1}t + \varphi_i(1-t)h_i^2 m_i + \varphi_i(t)h_i^2 m_{i+1}$$
$$\varphi_i(t) = \frac{\mathrm{sh}\left(k_i t\right) - t\,\mathrm{sh}\left(k_i\right)}{p_i^2\,\mathrm{sh}\left(k_i\right)} \qquad (15)$$

Отметим, что формулы (13) и (15) связаны соотношением

$$M_i(x) = \Lambda_i U_i(x) = \Lambda_i \varphi_i(1-t) h_i^2 m_i + \Lambda_i \varphi_i(t) h_i^2 m_{i+1} \qquad (16)$$

Чтобы решить системы (12) и (14), требуется единственно определить значения m_i, $i = 0,1, ..., N+1$ так, чтобы выполнялись условия стыковки (7) и краевые условия (9). Согласно уравнениям (14) и (15), условия (7) можно переписать в виде

$$U_{i-1}(x_i) = U_i(x_i)$$

$$\frac{U_{i-1}(x_i + \tau_{i-1}) - U_{i-1}(x_i - \tau_{i-1})}{2\tau_{i-1}} = \frac{U_i(x_i + \tau_i) - U_i(x_i - \tau_i)}{2\tau_i} \qquad (17)$$

$$\Lambda_{i-1} U_{i-1}(x_i) = \Lambda_i U_i(x_i)$$

где

$$\Lambda_j U_j(x) = \frac{U_j(x + \tau_j) - 2U_j(x) + U_j(x - \tau_j)}{\tau_j^2}, \; x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Согласно уравнениям (11), (12) и (15), первое и третье равенства в (17) тождественно выполняются. В силу формулы (15) и краевых условий (9), второе равенство в соотношениях (17) дает нам следующую линейную систему с трехдиагональной матрицей для неизвестных значений m_i:

$$m_0 = f_0''$$

$$\alpha_{i-1} h_{i-1} m_{i-1} + (\beta_{i-1} h_{i-1} + \beta_i h_i) m_i + \alpha_i h_i m_{i+1} = d_i, \; i = 1,2, ..., N \qquad (18)$$

$$m_{N+1} = f_{N+1}'',$$

где

$$d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}},$$

$$\alpha_i = -\frac{\varphi_i\left(1/n_i\right) - \varphi_i\left(-1/n_i\right)}{2/n_i} = -\frac{n_i sh\left(k_i/n_i\right) - sh(k_i)}{p_i^2 sh(k_i)}$$

$$\beta_i = \frac{\varphi_i\left(1+\,{}^{1}\!/_{n_i}\right)-\varphi_i\left(1-\,{}^{1}\!/_{n_i}\right)}{{}^{2}\!/_{n_i}} = \frac{n_i ch(k_i)\, sh\left({}^{k_i}\!/_{n_i}\right)-sk(k_i)}{p_i^2 sh(k_i)}$$

Используя разложение гиперболических функций в приведенных выше выражениях в степенные ряды, получаем

$$\beta_i \geq 2\alpha_i > 0, i = 0,1,...,N \text{ для всех } n_i > 1, p_i \geq 0.$$

Следовательно, система (18) имеет диагональное преобладание и в силу этого обладает единственным решением. Теперь мы можем заключить, что система (6)—(9) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде $U_i(x_{ij})$, $j = -1,0,...,n_i+1, i = 0,1,...,N$, тогда как постоянные m_i находятся из системы (18).

$$m_i = 2U[x_i - \tau_{i-1}, x_i, x_i + \tau_i], u_{i,n_i+1} = 2f_{i+1} - u_{i,n_i-1} + \tau_i^2 m_{i+1}$$

$$\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2\tau_i} = \frac{u_{i,1}-f_i}{\tau_i} - \frac{\tau_i}{2}m_i,\ u_{i,1},\ u_{i,-1} = 2f_i - u_{i,1} + \tau_i^2 m_i, x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$\frac{\tau_{i-1}+\tau_i}{2}m_i = \frac{u_{i,1}-f_i}{\tau_i} - \frac{f_i - u_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}}, U(x) = U_i(x),$$

Положим

$$U(x) = U_1(x), x \in [x_i, x_{i+1}]\ \ x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0,1,...,N \qquad (19)$$

В силу приведенного построения будем называть U дискретным гиперболическим сплайном с натяжением, интерполирующем данные (1).

4. Распараллеливание вычислений в расщепленной системе

Коэффициенты системы (18) содержат значения гиперболических функций sh(·) и ch(·). Чтобы исключить их вычисление, воспользуемся алгоритмом распараллеливания прогонки [13].

Из уравнений (14) при $j = 0$ и $j = n_i$ имеем

$$u_{i,-1} = 2f_i - u_{i,1} + \tau_i^2 m_i,\ u_{i,n_i+1} = 2f_{i+1} - u_{i,n_i-1} + \tau_i^2 m_{i+1}$$

или

$$\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2\tau_i}=\frac{u_{i,1}-f_i}{\tau_i}-\frac{\tau_i}{2}m_i,\ \frac{u_{i,n_i+1}-u_{i,n_i-1}}{2\tau_i}=\frac{f_{i+1}-u_{i,n_i-1}}{\tau_i}+\frac{\tau_i}{2}m_{i+1}.$$

Поэтому второе из условий (17) можно переписать в виде

$$\frac{\tau_{i-1}+\tau_i}{2}m_i=\frac{u_{i,1}-f_i}{\tau_i}-\frac{f_i-u_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} \qquad (20)$$

или по соглашению (19)

$$\frac{\tau_{i-1}+\tau_i}{2}m_i=\frac{u_{i,1}-f_i}{\tau_i}-\frac{f_i-u_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}}$$

Для исключения в (20) неизвестных величин и $u_{i-1},n_{i-1}-1$ воспользуемся следующим приемом. Пусть α_{ij} и β_{ij}, $j=0,1,...,n_i$ — решения системы (12) с краевыми условиями $m_{i0}=1$, $m_{i,n_i}=0$ и $m_{i0}=0$, $m_{i,n_i}=1$ соответственно. Тогда очевидно, что решение системы (12) можно записать в виде

$$m_{ij}=m_i\alpha_{ij}+m_{i+1}\beta_{ij},\ j=0,1,...,n_i \qquad (21)$$

Пусть теперь γ_{ij} и δ_{ij} — решения системы (14) с краевыми условиями $u_{i0}=u_{i,ni}=0$ и правыми частями α_{ij} и β_{ij} соответственно, а ε_{ij} – решение однородной системы (14) с краевыми условиями $\varepsilon_{i0}=f_i$ и $\varepsilon_{i,ni}=f_{i+1}$. Так как

$$\varepsilon_{ij}=f_i\left(1-t_{ij}\right)+f_{i+1}t_{ij},\ j=0,1,...,n_i$$

где $t_{ij}=\dfrac{\left(x_{ij}-x_i\right)}{h_i}$, то для решения системы (14) получаем

$$u_{ij}=f_i\left(1-t_{ij}\right)+f_{i+1}t_{ij}+m_i\gamma_{ij}+m_{i+1}\delta_{ij},\ j=0,1,...,n_i \qquad (22)$$

Пользуясь этой формулой и подставляя $u_{i,1}$ и $u_{i-1,n_{i-1}-1}$ в (20), находим с учетом краевых условий (9)

$$m_0=f_0^{''},$$

$$-\frac{\gamma_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}}m_{i-1}+\left(\frac{\tau_{i-1}+\tau_i}{2}-\frac{\delta_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}}-\frac{\gamma_{i,1}}{\tau_i}\right)m_i-\frac{\delta_{i,1}}{\tau_i}m_{i+1}= \qquad (23)$$

$$= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}},$$
$$i = 1,2,...,N, m_{N+1} = f''_{N+1}$$

Покажем, что эта система отличается от системы (18) лишь формой записи.

Явный вид величин α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij} легко может быть получен из формул (13) и (15). Так как согласно формуле (15)

$$u_{ij} = f_i(1-t_{ij}) + f_{i+1}t_{ij} + \varphi_i(1-t_{ij})h_i^2 m_i + \varphi_i(t_{ij})h_i^2 m_{i+1},$$

то для коэффициентов системы (23) получаем

$$-\frac{\delta_{i1}}{\tau_i} = -\frac{1}{\tau_i}\varphi_i(t_{i1})h_i^2 = -n_i h_i \varphi_i\left(\frac{1}{n_i}\right) \qquad (24)$$

$$\frac{\tau_i}{2} - \frac{\gamma_{i1}}{\tau_i} = \frac{\tau_i}{2} - \frac{1}{\tau_i}\varphi_i(1-t_{i1})h_i^2 = h_i\left[\frac{1}{2n_i} - n_i\varphi_i\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\right].$$

Функция φ_i удовлетворяет условиям:

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = \Lambda_i\varphi_i(0) = 0,\ \Lambda_i\varphi_i(1) = h_i^{-2}$$

откуда, в частности, следуют равенства

$$\varphi_i\left(-\frac{1}{n_i}\right) + \varphi_i\left(\frac{1}{n_i}\right) = 0,\ \varphi_i\left(1-\frac{1}{n_i}\right) + \varphi_i\left(1+\frac{1}{n_i}\right) = \frac{1}{n_i^2}$$

С учетом этих соотношений из равенств (24) имеем

$$-\frac{\delta_{i1}}{\tau_i} = -h_i\frac{\varphi_i\left(1/n_i\right) - \varphi_i\left(-1/n_i\right)}{2/n_i} = \alpha_i h_i,$$

$$\frac{\tau_i}{2} - \frac{\gamma_{i1}}{\tau_i} = h_i\frac{\varphi_i\left(1+1/n_i\right) - \varphi_i\left(1-1/n_i\right)}{2/n_i} = \beta_i h_i$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{\gamma_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} = \alpha_{i-1}h_{i-1}, \frac{\tau_{i-1}}{2} - \frac{\delta_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} = \beta_{i-1}h_{i-1}$$

Таким образом, система (23) отличается от системы (18) лишь формой записи. Как следствие, эта система имеет диагональное преобладание. В отличие от системы (18) система (23) не требует вычисления значений гиперболических функций и может быть эффективно решена методом обычной трехточечной прогонки.

5. Алгоритмы вычисления сеточного решения

В отличие от стандартного подхода [5], основанного на прямом решении пятидиагональной линейной системы (6)—(9), рассмотренный в предыдущих двух пунктах метод использует расщепление этой системы на трехдиагональные линейные системы, решение которых также не требует вычисления значений гиперболических функций и обеспечивает дешевое и простое получение сеточного решения (10).

Сформулируем основные шаги, рассмотренного в п. 3—4 алгоритма.

Шаг 1. Решить $2(N+1)$ трехдиагональных систем (12) с краевыми условиями $m_{i,0}=1$. $m_{i,n_i}=0$ и $m_{i,0}=0$, $m_{i,n_i}=1$ для нахождения соответственно величин α_{ij} и β_{ij}, $j=0,1,...,n_i$, $i=0,1,...,N$.

Шаг 2. Решить 2(N+1) трехдиагональных систем (14) с однородными краевыми условиями $u_{i,0}=u_{i,n_i}=0$ и правыми частями α_{ij} и β_{ij} для нахождения соответственно величин γ_{ij} и δ_{ij}, $j=0,1,\ ...,\ n_i$, $i=0,1,...,N$.

Шаг 3. Из системы (23) вычислить параметры m_i, $i=0,1,...,N+1$.

Шаг 4. По формуле (22) найти значения u_{ij}, $j=0,1,...,n_i$, $i=0,1,...,N$.

В этом алгоритме решение любой из систем (12) и (14) требует выполнения $8q$ арифметических операций [4], где q — число неизвестных. Это существенно дешевле, чем прямые вычисления по формуле (15).

Шаги 1 и 2 в этом алгоритме можно объединить. Вместо $2(N+1)$ трехдиагональных систем (12) и (14) рассмотрим $N+1$ пятидиагональных систем

$$u_{i,0} = f_i, \Lambda_i u_{i,0} = m_i,$$

$$\Lambda_i^2 u_{i,j} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \Lambda_i u_{i,j} = 0, \ j = 1,2,..., n_i - 1, i = 0,1,..., N \qquad (25)$$

$$u_{i,n_i} = f_{i+1}, \ \Lambda_i u_{i,n_i} = m_{i+1}$$

Вначале находятся решения этих систем γ_{ij} и δ_{ij} с краевыми условиями $u_{i,0} = u_{i,n_i} = 0$ и соответственно, $\Lambda_i u_{i,0} = 1$, $\Lambda_i u_{i,n_i} = 0$ и $\Lambda_i u_{i,0} = 0$, $\Lambda_i u_{i,n_j} = 1$, т. е. решаются $2(N+1)$ пятидиагональных систем вида (25). Далее для нахождения сеточного решения u_{ij}, $j = 0,1,...,n_i$, $i = 0,1,...,N$ выполняются шаги 3 и 4 основного алгоритма.

Данные алгоритмы могут быть эффективно распараллелены и реализованы на многопроцессорных ЭВМ.

6. Прямое расщепление пятидиагональной системы

В системе (6)—(9) неизвестные $\{u_{0,-1}, i = 0,1,...,N\}$ и $\{u_{i,n_i+1}, i = 0,1,...,N-1\}$ исключаем посредством соотношений (7). Значения сеточного решения в точках задания данных x_i определяем согласно условиям интерполяции. Неизвестные $u_{0,-1}$ и u_{N,n_N+1} исключаем, используя краевые условия (9). В результате система (6)—(9) приводится в виду

$$Au = b, \qquad (26)$$

где A — пятидиагональная матрица.

Число неизвестных в системе (26) иногда может быть очень большим (например, при генерировании сетки в случае многомерной задачи интерполяции). По этой причине даже линейный рост стоимости вычислений для получения решения нашей пятидиагональной системы может оказаться неприемлемым. Однако для вычисления сеточного решения при использовании ЭВМ параллельного действия можно легко распределить вычисления между процессорами. Рассмотрим вкратце эту возможность.

Основная идея состоит в преобразовании матрицы А, вид которой для $N = 2$, $n_i = 18$ показан на рис. 1 слева, к матрице К (см. рис. 1 справа). Полагая $r_i = \sum_{\nu=0}^{i-1} (n_\nu - 1)$, замечаем, что строки

$r_i+1,\ ...,\ r_i-1$ в A соответствуют уравнениям (6) для подотрезка $[x_i,x_i+1]$. Если вычесть из K строки $r_i+1,\ ...,\ r_i+4, i=0,1,\ ...,\ N$, то получим блочную матрицу E, вид которой показан на рис. 2 слева. Соответствующая линейная система имеет совсем мало уравнений, и, решив ее, можно далее параллельно решить $N+1$ линейных систем, полученных из «оставшейся» матрицы F (см. рис. 2 справа) путем извлечения ее независимых блоков.

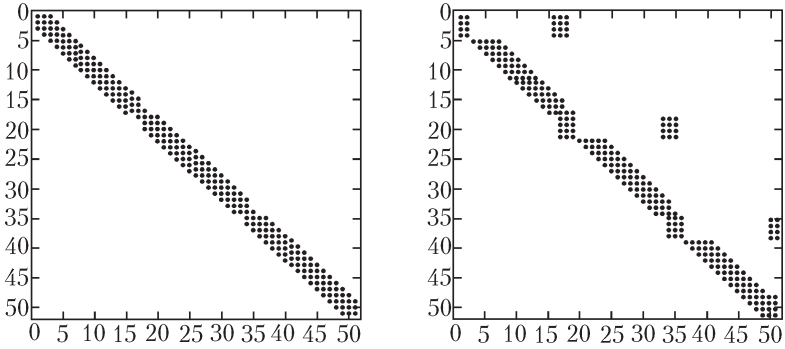


Рис. 1. Слева: вид A для $N=2$, $n_i=18$. Справа: матрица K

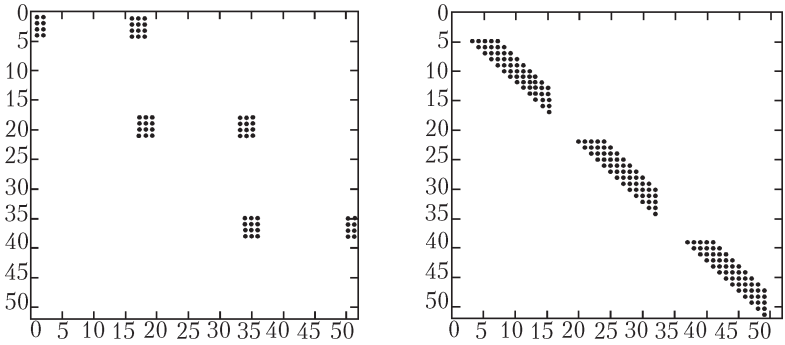


Рис. 2. Слева: блочная матрица E. Справа: блочная матрица F

Таким образом, задача состоит в том как преобразовать матрицу A в матрицу K. В п. 3 и 4 были получены следующие два факта. Исходя из структуры матрицы A, показанной на рис. 1, рассмотрим блок из строк $r_i+1,\ ...,\ r_{i+1}$. Заметим, что элементы столбцов с индексами $r_i+3,\ ...,\ r_{i+1}-2$ суть $1, a_i, b_i, a_i, 1$, являются коэффициентами разностного уравнения (6). Однако, в п. 3 было показано, что всякая функция вида

$$\Upsilon_i(x) = c_1(1-t) + c_2 t + c_3\varphi_i(1-t) + c_4\varphi_i(t) \qquad (27)$$

является решением для (6). Таким образом, если умножить строку с индексом $r_i + j, j = 1,2, \ldots, n_i - 1$ на $\Upsilon_i(x_{i,j}) = \Upsilon_i(x_i + j\tau_i)$ и затем сложить все эти строки, то вклад всех столбцов с $r_i + 3$ по $r_{i+1} - 2$ будет равен нулю. Идея получения матрицы К из матрицы А состоит в следующем: четыре строки с индексами $r_i + 1$, $r_i + 2$, $r_i + 3$, $r_i + 4$ заменяются суммой строк с $r_i + 1$ по r_{i+1}, умноженных на значения в x_{ij} четырех линейно независимых функций вида (27). Остается решить вопрос, как выбрать эти функции. Серия численных экспериментов показала, что наименьшее число обусловленности матрицы К (которое, вообще говоря, больше числа обусловленности для А) достигается при использовании фундаментальных многочленов Лагранжа, строящихся по узлам x_{iv}, ближайшим к точкам x_i, $x_i + h_i/3$, $x_{i+1} - h_i/3$, x_{i+1}.

7. Числовые примеры

В этом пункте на ряде общеупотребительных примеров будут проиллюстрированы изогеометрические свойства дискретных гиперболических сплайнов с натяжением. Заметим прежде, что наш дискретный гиперболический сплайн U_i, задаваемый формулой (15), обладает свойствами сохранения формы данных, присущими стандартному гиперболическому сплайну (см., например, [12]). А именно, функция U_i является выпуклой (вогнутой) на $[x_i, x_{i+1}]$ тогда и только тогда, когда $m_{i+j} \le 0\ (\ge 0)$, $j = 0,1$ и U_i может иметь на $[x_i, x_{i+1}]$ не более одной точки перегиба. Следовательно, чтобы сохранить форму исходных данных, достаточно проанализировать величины $\Lambda_i u_{i,0}$ и $\Lambda_i u_{i,n_i}$ и увеличить при необходимости значения параметров натяжения. Зарекомендовавшие себя стратегии автоматического выбора параметров натяжения для стандартных гиперболических сплайнов [см., напр., 5, 11, 12] могут быть успешно использованы и в нашем дискретном контексте.

В первом примере интерполировались радиохимические данные, приведенные в табл. 1. Данные табл. 1 являются неравноотстоящими. Между точками задания данных использовалась.

Таблица 1

x_i	7.99	8.09	8.19	8.7	9.2
f_i	0	2.76429E-5	4.37498E-2	0.169183	0.469428

x_i	10	12	15	20
f_i	0.943740	0.998636	0.999916	0.999994

Краевые условия задавались в виде $m_0 = \Lambda_0 u_{0,0} = 0$, $m_N + 1 = \Lambda_N u_{N,n_N} = 0$. Эффект изменения значений параметров натяжения показан на рис. 3 и 4. Рис. 3 получен при нулевых значениях параметров натяжения ($p_i = 0$ для интерполяционного дискретного гиперболического сплайна с параметрами натяжения $p_0 = p_1 = 300$, $p_i = 15$, $i = 2, 3, ..., 7$ показан на рис. 4. Очевиден эффект стягивания при увеличении значений параметров натяжения.

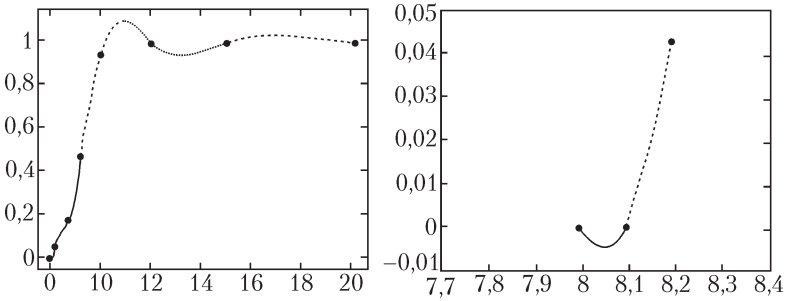


Рис. 3. Радиохимические данные с краевыми условиями $m_0 = m_N + 1 = 0$. Интерполяция дискретным гиперболическим сплайном с $p_i = 0$ для всех i. Справа: увеличение левого нижнего угла

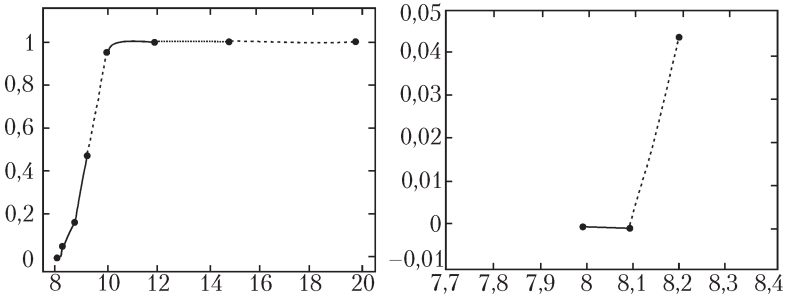


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, с $p_0 = p_1 = 300$, $p_i = 15$, $i = 2, 3, ..., 7$

Таблица 2

Данные Акимы [14]

x_i	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
f_i	10	10	10	10	10	10	10,5	15	56	60	85

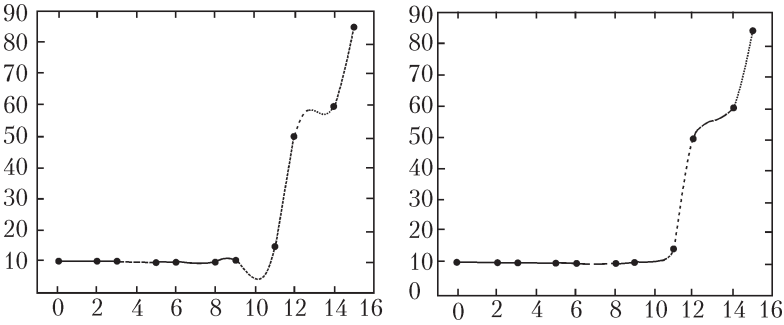


Рис. 5. Данные Акимы с краевыми условиями $m_0 = m_{N+1} = 0$.
Слева: интерполяционный дискретный кубический сплайн ($p_i = 0$).
Справа: дискретный гиперболический сплайн с $p_5 = p_6 = p_8 = 10$

Во втором примере использовались данные Акимы [14], приведенные в табл. 2. Для этих неравноостоящих данных строился интерполяционный дискретный гиперболический сплайн с 20 узлами равномерной сетки на каждом подотрезке между точками задания данных. Краевые условия брались в виде $m_0 = m_{N+1} = 0$. На рис. 5 слева показан график интерполяционного дискретного кубического сплайна, полученный при $p_i = 0$ при всех i. Заметно нарушение присущих исходным данным свойств монотонности и выпуклости. На этом же рисунке справа интерполяционный дискретный кубический сплайн при $p_5 = p_6 = p_8 = 10$ и $p_i = 0$ для остальных значений i адекватно воспроизводит форму исходных данных.

Литература

1. **Голованов Н. Н., Ильютко Д. П., Носовский Г. В., Фоменко А. Т.** — М. : Академия, 2006.

2. **Farin G.** Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. — San Diego : Academic Press, 2002.

3. **Hoschek J., Lasser D.** Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. — Wellesley, Massachusetts : A K Peters, 1993.

4. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. — М. : Наука, 1980.

5. **Квасов Б. И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. — М. : Физматлит, 2006.

6. **Späth H.** One Dimentional Spline Interpolation Algorithms. — Massachusetts : A K Peters, 1995.

7. **Schweikert D. G.** An Interpolating Curve Using a Spline in Tension // J. Math. Phys. — 1966. — Vol. 45. — P. 312—317.

8. **Koch P. E., Lyche T.** Interpolation with exponential B-splines in tension // Geometric Modelling : Computing Supplementum 8 / Ed. by G. Farin et al. — Wien : Springer Verlag, 1993. — P. 173—190.

9. **Sadipis N. S., Kaklis P. D.** An algorythm for constructing convexity and monotonicity-preserving splines of tension // Computer Aided Geometric Design. — 1988. — Vol. 5. — P. 127—137.

10. **Kvasov B. I.** Methods of Shape-Preserving Spline Approximation. — Singapore : World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd., 2000.

11. **Renka R. J.** Interpolation Splines with Automatic Selection of Tension Factors // SIAM J. Sci. Stat. Comp. — 1987. — Vol. 8. — P. 393—415.

12. **Rentrop P.** An algorythm for computation of exponential splines // Numer. Math. — 1980. — Vol. 35. — P. 393—415.

13. **Яненко Н. Н., Коновалов А. Н., Бугров А. Н., Шустов Г. В.** Об организации параллельных вычислений и «распараллеливании» прогонки // Численные методы механики сплошной среды. — 1978. — Т. 9. — № 7. — С. 139—146.

14. **Akima H.** A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures // J. Assoc. Comput. Mach. — 1970. — Vol. 17. — P. 589—602.