Стратегии распараллеливания в задаче о динамике протопланетного диска[1]

В. А. Вшивков, С. Е. Киреев, Е. А. Кукшева,*
А. В. Снытников, Н. В. Снытников
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
*Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск

В работе представлены некоторые стратегии распараллеливания, использованные при решении конкретной задачи, а именно, моделировании динамики протопланетного диска. Среди них: упрощение трехмерной модели протопланетного диска до квазитрехмерной, использование фундаментального решения уравнения Пуассона, моделирование в естественной (цилиндрической) системе координат и декомпозиция области моделирования. Показано, что стратегия на основе декомпозиции области позволяет достигнуть наибольшего ускорения.

1. Введение

Проблема происхождения органической материи в Солнечной системе всегда представляла большой интерес. Одна из гипотез происхождения органической материи рассмотрена в [1], где протопланетный диск рассматривается как каталитический химический реактор для синтеза первичных органических соединений. В связи с этим широко исследовались происхождение и эволюция протопланетных дисков [см. обзор: 2]. В простейшем случае считается, что протопланетный диск состоит из газа (в основном, водорода и гелия) и твердых пылевых частиц, из которых в конце концов и образуются планеты. Полное моделирование динамики протопланетного диска должно включать в себя решение системы

[1] Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН «Происхождение и эволюция биосферы» № 18-2, программы президиума РАН П-04 «Происхождение и эволюция звезд и галактик», программы СО РАН по супер-ЭВМ, грантов РФФИ 05-01-00665 и 08-01-00615, программы Рособразования «Развитие научного потенциала ВШ» (проект РНП.2.2.1.1.3653 и проект РНП.2.2.1.1.1969).

уравнений газовой динамики, уравнений, моделирующих движение пылевых частиц при наличии сил гравитации, взаимного трения. Необходимо учитывать излучение центрального тела, коагуляцию частиц, химические реакции и другие физико-химические процессы. В настоящей работе рассмотрена только «механическая» часть этой модели, включающая решение уравнений газовой динамики и бесстолкновительного кинетического уравнения Власова-Лиувилля, описывающего движение частиц.

Численное решение системы уравнений газовой динамики ведется на равномерной прямоугольной сетке с помощью явной конечно-разностной схемы [8]. Распараллеливание данной схемы не представляет трудностей, поэтому оно здесь не рассматривается. Наибольшие трудности представляет решение кинетического уравнения Власова-Лиувилля и уравнения Пуассона для гравитационного потенциала. Численное решение уравнения Власова-Лиувилля выполняется методом частиц-в-ячейках (PIC-методом) [4, 5].

Узким местом численных экспериментов является решение трехмерного уравнения Пуассона на каждом шаге по времени. Кроме того, необходимо отслеживать индивидуальные траектории большого числа частиц [7]. Наконец, трехмерные массивы плотности, потенциала и гравитационных сил должны храниться в оперативной памяти. Для изучения нелинейных процессов, таких как формирование сгустков, пространственное разрешение вычислительной сетки (т. е. ее размер) должно быть достаточно велико [6]. Сгустки рассматриваются как вероятные зародыши планет, и их размер намного меньше размера вычислительной области. Поэтому моделирование формирования сгустков будет проходить неверно при недостаточно большом пространственном разрешении (на грубой сетке).

Перечисленные выше трудности были частично устранены путем упрощения трехмерной модели диска до квазитрехмерной [8–10]. В квазитрехмерной модели вещество не имеет вертикальной скорости, но гравитационное поле должно рассматриваться в трехмерной области, поэтому модель была названа квазитрехмерной, а не просто двумерной.

Квазитрехмерная модель считается применимой для протопланетного диска, толщина которого на порядок меньше его радиуса. Еще одним условием применимости квазитрехмерной

модели диска является наличие в центре массивного тела [12]. Таким образом, квазитрехмерная модель подходит для изучения поздних стадий эволюции протопланетного диска. С другой стороны, существуют проблемы, которые не могут быть решены с помощью квазитрехмерной модели. Например, восстановление наблюдаемой диаграммы спектрального излучения (SED) протопланетного диска [3] может быть выполнено только с помощью полностью трехмерного моделирования.

На основе PIC-метода нами разработано несколько численных реализаций математической модели протопланетного диска, которые различаются способом решения уравнения Пуассона [7, 8, 11, 12]. Это было необходимо по следующим причинам:

- проблема не имеет аналитического решения для большого диапазона начальных параметров и сравнение численных экспериментов с помощью различных программ может использоваться для верификации численного решения;
- разработанные параллельные алгоритмы могут работать по-разному при различных начальных параметрах численного эксперимента, таких как число частиц и количество узлов сетки.

В настоящей работе мы рассматриваем различные стратегии параллельной реализации модели протопланетного диска в зависимости от особенностей модели. В главе 2 представлена рассматриваемая модель протопланетного диска, и кратко рассмотрена ее численная реализация. Затем, в главе 3 перечислены цели параллельной реализации модели протопланетного диска (раздел 3.2), и представлен общий метод достижения этих целей (раздел 3.3). В дальнейших главах представлены различные стратегии реализации модели протопланетного диска.

Все численные эксперименты проводились на суперкомпьютерах МВС-1000М на процессорах Alpha 21264, установленных в Сибирском суперкомпьютерном центре (Новосибирск) и Объединенном суперкомпьютерном центре (Москва). Для выполнения межпроцессорных коммуникаций использовалась библиотека MPI.

2. Модель протопланетного диска

2.1. Основные уравнения

Динамика пылевой компоненты протопланетного диска описывается кинетическим уравнением Власова-Лиувилля. Гравитационное поле определяется уравнением Пуассона. Эти уравнения представлены в следующей форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla f + \vec{a}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \\ \Delta\Phi = 4\pi G\rho \end{cases} \qquad (1)$$

где $f(t, r, v)$ — зависимая от времени одночастичная функция распределения по координатам и скоростям, $\vec{a} = -\nabla\Phi$ — ускорение частицы. G — гравитационная постоянная, Φ — гравитационный потенциал. Здесь мы используем бесстолкновительное приближение усредненного самосогласованного поля. Подробное описание модели может быть найдено в [7—10].

Полная модель протопланетного диска также включает газовую динамику, радиацию, химические реакции, коагуляцию частиц пыли и т. д. Но настоящая работа сосредоточена на двух представленных уравнениях, так как параллельная реализация их решения является наиболее трудной.

2.2. Численная реализация модели

Моделирование протопланетного диска включает решение комплексной системы уравнений: кинетического уравнения Власова-Лиувилля и уравнения Пуассона. Уравнение Власова-Лиувилля в большинстве случаев [4] решается методом частиц-в-ячейках [5].

Существует большое число методов решения уравнения Пуассона (они могут быть найдены в [14]). Однако наша модель имеет особые требования и ограничения. Прежде всего, нам необходимо решать трехмерное уравнение Пуассона на очень подробных сетках. Самые быстрые методы, основанные на циклической редукции (например, FACR, DCR) не могут быть использованы на мелких сетках вследствие присущей им численной неустойчивости. Во-вторых, численный метод должен легко распаралле-

ливаться. И, наконец, уравнение Пуассона должно решаться на каждом временном шаге вычислительного эксперимента. Таким образом, итерационные методы оказываются наиболее подходящими, так как они могут использовать знание потенциала с предыдущего шага.

Разработанные нами параллельные программы, прежде всего, различаются решателями уравнения Пуассона. Были использованы следующие методы:

- 3D быстрое преобразование Фурье (в программе с декомпозицией области);
- быстрое преобразование Фурье с последовательной верхней релаксацией (3D программа в цилиндрических координатах и квази-3D программа);
- и метод, основанный на фундаментальном решении уравнения Пуассона.

В последовательном случае метод, основанный на трехмерном БПФ, является самым быстрым, если уравнение решается однократно, БПФ с ПВР быстрее обычного БПФ, если уравнение Пуассона решается в серии временных шагов. Метод, основанный на фундаментальном решении, является самым медленным из трех, но лучше всех распараллеливается.

3. Параллельная реализация модели протопланетного диска

3.1. Необходимость распараллеливания

Вычислительные ресурсы, требуемые для решения рассматриваемой проблемы, могут быть оценены, например, следующим способом. При моделировании эволюции Солнечной системы наиболее интересующая область расположена в пределах орбиты Марса, радиус которой в 40 раз меньше радиуса всей системы (радиуса орбиты Плутона). Если на расстояние радиуса орбиты Марса положить минимально необходимое разрешение в 10 узлов сетки, то общий размер сетки получится 400 узлов по радиальному направлению в цилиндрической системе координат. Таким образом, мы получаем оценку в 400^3 узлов для 3D сетки. Для того, чтобы уровень шумов составлял менее 10 %, необходимо иметь более 100 частиц на ячейку сетки. Отсюда мы получаем 6,4 млрд частиц, что в сумме составляет около 300 ГБ памяти

(3 координаты и 3 компоненты скорости с двойной точностью для каждой частицы).

Современные персональные компьютеры позволяют проводить вычислительные эксперименты с максимальным числом узлов сетки 128^3 и числом частиц не более 10 млн. И даже они требуют от двух до семи дней [12]. Таким образом, параллельная реализация математической модели (1) абсолютно необходима для моделирования протопланетного диска.

3.2. Цели распараллеливания

Ниже представлены цели создания параллельной реализации математической модели протопланетного диска:

- Проводить численные эксперименты с достаточно большим числом частиц и узлов сетки, чтобы обеспечить требуемую точность вычислений. Вычислительные эксперименты такого большого размера обычно невозможны на однопроцессорных рабочих станциях.
- Проводить серии вычислительных экспериментов (возможно, десятки вычислительных экспериментов с различными начальными данными) за обозримое время. С нашей точки зрения время, необходимое для проведения серии вычислительных экспериментов, нацеленных на проверку некоторой гипотезы, не должно превышать одного месяца.

Таким образом, высокие показатели ускорения не так важны для параллельной программы, реализующей математическую модель протопланетного диска. Более того, само понятие ускорения должно быть уточнено. Если оно рассматривается как оценка качества параллельной реализации математической модели, то его необходимо скорректировать. Ускорение обычно рассматривается как отношения времени вычислений на одном процессоре ко времени вычислений на многопроцессорной системе. Но проблема состоит в том, что вычисления на одном процессоре могут не интересовать физика.

Основным требованием к параллельной программе, реализующей модель протопланетного диска, является возможность распределить вычисления равномерно по максимальному числу процессоров. Необходимо достигнуть высокой точности вычис-

лений, используя большой объем оперативной памяти, и высокой скорости вычислений, используя большое число процессоров. Чтобы обеспечить возможность распределить вычисления, необходимо иметь:

- равномерную загрузку процессоров;
- минимальный объем межпроцессорных коммуникаций.

3.3. Стратегии распараллеливания

При выборе метода распараллеливания нужно принять во внимание то, что различные параллельные реализации могут иметь различные времена вычислений в зависимости от параметров численных методов. Поэтому мы рассматриваем различные стратегии распараллеливания.

Кроме того для параллельной реализации математической модели должны быть выбраны специальные численные методы, т. е. такие методы, которые позволяют разделить вычисления на максимальное число независимых частей. Это одна из ключевых идей сборочной технологии синтеза параллельных программ [15]. Это условие удовлетворяется благодаря использованию PIC-метода для решения уравнения Власова-Лиувилля и метода преобразования Фурье для решения уравнения Пуассона.

Дискретное преобразование Фурье сводит трехмерное уравнение Пуассона (в цилиндрической системе координат):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=4\pi G\rho \qquad (2)$$

к набору независимых двумерных уравнений для гармоник потенциала (обозначенных здесь как $H_k(r,z)$), k — номер гармоники):

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\sin\frac{\pi k}{N_\varphi}H+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=4\pi GR,\ k=0,\ ...,\ N_\varphi-1\\ H_k(r,z)=\sum_{k=0}^{N_\varphi-1}\Phi(r,\varphi,z)\cos\frac{\pi k\varphi}{N_\varphi}\ R_k(r,z)=\sum_{k=0}^{N_\varphi-1}\rho(r,\varphi,z)\cos\frac{\pi k\varphi}{N_\varphi}\end{gathered} \qquad (3)$$

Так что вполне естественным является использование этой особенности для распараллеливания решения уравнения Пуассона, распределяя группы гармоник по процессорам.

PIC-метод сводит решение кинетического уравнения Власова-Лиувилля к решению уравнений движения отдельных частиц. Так как вычисление координат и скоростей каждой частицы не зависит от других частиц, PIC-метод является естественным для параллельного решения уравнения Власова-Лиувилля.

Таким образом, возможность распараллеливания должна присутствовать в самой структуре применяемых математических методов, как это видно в формуле (3).

4. Параллельная программа для квази-3D модели

Параллельная реализация 3D модели диска потребует межпроцессорных пересылок трехмерных массивов. Самый легкий способ реализации параллельной модели протопланетного диска — свести трехмерную модель к квазитрехмерной. В квазитрехмерной модели вертикальное движение диска не учитывается, однако гравитационное поле должно рассматриваться как трехмерное.

Уравнения Пуассона решается на сетке в цилиндрической координатной системе, чтобы учесть симметрию диска и избавиться от нефизических структур, возникающих при решении на декартовой сетке. Подробности используемого метода решения уравнения Пуассона даны в [8, 13]. Сначала по радиальному направлению применяется БПФ, а затем каждая гармоника потенциала решается методом последовательной верхней релаксации.

Рассматриваемый метод решения уравнения Пуассона позволяет полностью исключить обмены во время выполнения итераций. Это достигается благодаря тому, что уравнения для гармоник потенциала не зависят друг от друга. После итерационной стадии потенциал должен быть собран со всех процессоров для выполнения дальнейших вычислений. Поэтому возможно разделить вычислительную область на полностью независимые подобласти в соответствии с волновым числом по углу.

Частицы также равномерно распределяются между процессорами независимо от их расположения в пространстве. Так как частица может в процессе моделирования может перелетать в любую точку диска, каждый процессор должен иметь значение потенциала со всей поверхности диска.

На каждом временном шаге обмен данными выполняется дважды. Сначала после достижения сходимости гармоники

потенциала в плоскости диска собираются для выполнения обратного преобразования Фурье. Затем частичные распределения плотности, вычисленные на каждом процессоре, суммируются и рассылаются по всем процессорам.

Такие взаимодействия типа все-со-всеми стали возможными благодаря тому, что модель является квазитрехмерной: передаются двумерные массивы вместо трехмерных в случае полной 3D модели.

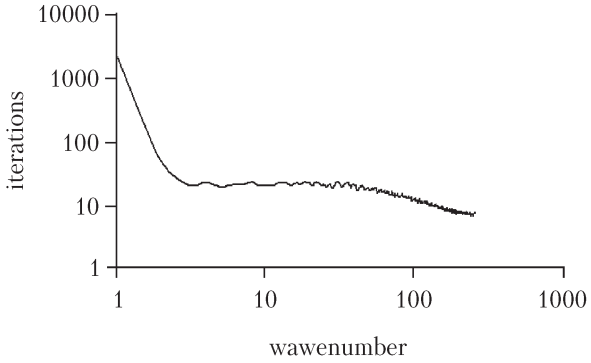


Рис. 1. Число итераций ПВР в зависимости от волнового числа

Двумерные системы для гармоник потенциала требуют различного числа итераций для сходимости, как показано на рис. 1. Здесь число итераций зависит от обусловленности матрицы системы уравнений. Это значит, что процессоры будут иметь различную загрузку при одинаковом числе гармоник. Таким образом, изначально одинаковая загрузка не может быть обеспечена для всех процессоров. Есть два пути решения этой проблемы: использовать более быстрые методы в тех случаях, где скорость сходимости низкая, и использовать динамическую балансировку загрузки. Динамическая балансировка загрузки здесь означает перемещение некоторых гармоник с перегруженных процессоров.

В результате упрощения 3D модели до квазитрехмерной мы получили параллельную программу, которую было довольно просто реализовать, и которая способна выдавать приемлемые физические результаты. Тем не менее, в квази-3D модели загрузка процессоров не равномерная, и ускорение не слишком высо-

кое: в 5 раз на 32 процессорах для сетки размером $400 \times 512 \times 200$ узлов с 20 млн частиц. Время одного временного шага моделирования для задачи указанного размера составляет 25 с на один процессор. Ускорение небольшое из-за того, что наибольшее время отнимало решение системы линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей для нулевой гармоники. Даже выделение ее на отдельный процессор не изменяло ситуации. Очевидно, что для получения более высокого ускорения необходимо использовать другой метод.

5. Параллельная программа, основанная на фундаментальном решении уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона имеет фундаментальное решение в форме:

$$\Phi(\tau) = \int \frac{\rho(\tau')}{|R|} d\tau' \tag{4}$$

где $|R| = |\tau - \tau'|$, $\Phi(\tau)$ — это потенциал, который должен быть вычислен в точке τ. Пусть задана двумерная вычислительная область в полярных координатах радиуса R_N. Тогда равномерная 2D сетка для потенциала Φ с шагами h_r и h_φ вводится следующим образом:

$$\begin{cases} r_i = h_r \cdot i, \quad i = 0,1,\ldots,N_r, \quad h_r = \dfrac{R_N}{N_r} \\ \varphi_j = h_\varphi \cdot j, \quad j = 0,1,\ldots,N_\varphi, \quad h_\varphi = \dfrac{2\pi}{N_\varphi} \end{cases} \tag{5}$$

В узлах заданной сетки интеграл (4) заменяется на сумму:

$$\Phi_{i',j'} = \sum_i \sum_j \frac{M_{i,j}}{R_{i,j,i',j'}} \tag{6}$$

$\Phi_{i',j'}$ вычисляется путем суммирования потенциалов точечных масс, находящихся в центрах ячеек сетки. Таким образом, сетка на которой берутся точечные массы, оказывается сдвинутой относительно сетки, на которой вычисляется потенциал, а $R_{i,j,i',j'}$ — расстояние от узла (i', j') сетки потенциала до узла (i, j) сетки точечных масс.

Вычисление потенциала по формуле (6) может быть просто распределено между процессорами, например, следующим образом:

$$\Phi_{i',j'} = \sum_{i=N_r/N_{proc}\cdot rank}^{N_r/N_{proc}\cdot(rank+1)} \sum_j \frac{M_{i,j}}{R_{i,j,i',j'}} \qquad (7)$$

Здесь N_{proc} — число процессоров, *rank* — номер процессора (*rank* = 0, ..., N_{proc} — 1). Данный метод дает полностью равномерную загрузку процессоров, и, следовательно, ускорение параллельной программы получается высоким (см. табл. 1).

Таблица 1

Время счета для различного числа процессоров для сетки $N_r = 400$, $N\phi = 400$ *узлов*

Число процессоров	**Время, минуты**
1	75
12	5,55
25	2,63
50	1,36
100	0,75
200	0,49

К сожалению, для небольшого числа процессоров вычисление потенциала по формуле (7) выполняется намного медленнее, чем для метода, представленного в главе 4. Более того, обе программы могут выполнять моделирование динамики протопланетного диска только для ограниченного круга задач.

6. 3D параллельная программа в цилиндрической координатной системе

Как было сказано в разделе 3.1, существуют проблемы, требующие полного 3D моделирования. Поэтому была реализована численная модель, в которой вещество протопланетного диска имеет вертикальную компоненту скорости [12].

В данном случае уравнение Пуассона также решается комбинацией БПФ по угловой координате и ПВР для отдельных гармоник потенциала, как в главе 4. Как было сказано в главе 4, одной

из трудностей является неравномерная загрузка процессоров вследствие различного времени вычислений для различных гармоник. Эта трудность присутствует и в 3D случае, как и в квази-3D, несмотря на то, что модели имеют множество различий, например, в граничных условиях, распределении плотности и т. п.

Поэтому необходимо построить такой алгоритм распределения гармоник, чтобы сделать загрузку процессоров близкой к равномерной. Принимая во внимание, что динамическая балансировка загрузки может иметь негативный эффект вследствие увеличения межпроцессорных коммуникаций, мы решили сделать статическое распределение загрузки. Этот алгоритм загрузки основан на экспериментальных данных о временах вычислений каждой гармоники:

- для вычисления гармоники с волновым числом $m = 0$ выделяется отдельный процессор;
- каждый процессор (кроме указанного выше) получает гармоники с большими и малыми волновыми числами. Каждая гармоника вычисляется только на одном процессоре.

Этот простой алгоритм обеспечивает загрузку процессоров близкую к равномерной. В табл. 2 показано время вычислений для различных этапов решения уравнения Пуассона. Распараллеленным является этап вычисления гармоник, распределенных по процессорам. Но, как видно из табл. 2, самыми затратными по времени этапами являются БПФ для плотности и потенциала, а также сборка вычисленных гармоник (передача данных между процессорами), так как они работают с 3D массивами данных.

Таблица 2

Время работы (в секундах) для различных этапов решения уравнения Пуассона на одном временном шаге на процессор

Число процессоров	**БПФ для плотности**	**Вычисление гармоник**	**Сборка гармоник**	**БПФ для потенциала**	**Общее время**
10	0,3	0,7	0,65	0,4	2,05

Следует заметить, что сложность с долгим вычислением БПФ возникает только в 3D случае, потому что преобразование Фурье должно быть применено к целому 3D массиву плотности и потенциала. Это означает, что дальнейшее улучшение

параллельной программы, реализующей 3D модель протопланетного диска возможна только путем декомпозиции области моделирования.

7. 3D параллельная программа, основанная на декомпозиции области моделирования

Декомпозиция области используется для того, чтобы удовлетворить требованиям параллельной реализации модели протопланетного диска, данным в разделе 3.2. Более того, частицы, принадлежащие одной подобласти, распределяются между процессорами, каждый из которых содержит часть сетки соответствующей подобласти.

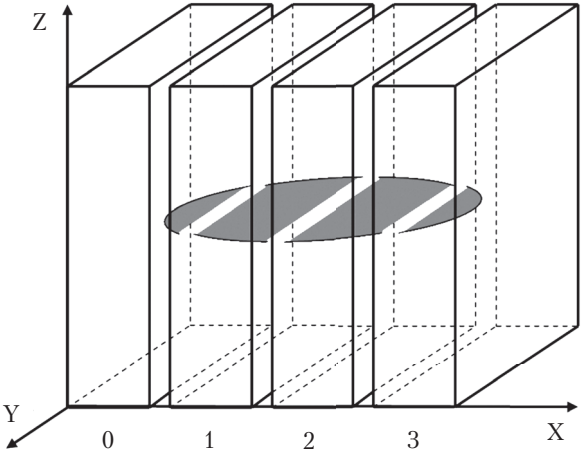


Рис. 2. Декомпозиция 3D области моделирования

Декомпозиция выполняется простейшим образом — путем разделения области на части одинакового размера вдоль одного из координатных направлений, как показано на рис. 2. В этом случае каждый слой имеет только два смежных слоя. В результате обмен частицами со смежными слоями выполняется очень просто.

Исходя их свойств решения задачи моделирования протопланетного диска, большинство частиц расположено около плоскости диска. Диск вращается вокруг оси, параллельной оси Z.

Поэтому разделение области на подобласти осуществляется плоскостями, параллельными плоскости YZ. Таким образом, мы избегаем заведомо неравномерного распределения частиц по процессорам, которое может получиться, если разрезать область параллельно плоскости XY. В текущей реализации вычислительная область разделяется на слои почти одинаковой толщины с частичным перекрытием границ.

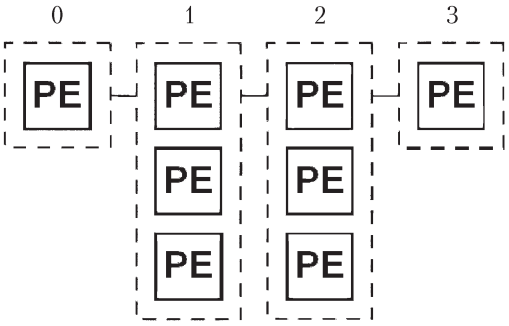


Рис. 3. Распределение групп процессоров по подобластям

Уравнение Пуассона решается на равномерной сетке в декартовой системе координат. Такая простая сетка позволила нам использовать достаточно эффективный метод, основанный на трехмерном быстром преобразовании Фурье. Для дискретизации вторых производных в уравнении Пуассона используются 27-точечный шаблон. БПФ на многопроцессорной вычислительной системе выполняется с использованием свободно распространяемой библиотеки FFTW.

Чтобы обеспечить равномерное распределение частиц между процессорами, каждому слою сопоставляется группа процессоров, как показано на рис. 3. Сеточные значения для всего слоя (потенциала, плотности и т. д.) хранятся во всех процессорах группы. Каждая группа имеет главный процессор. Распределение процессоров по группам выполняется статически на основе распределения частиц по всей области моделирования. В ходе вычислений частицы перелетают из одного слоя в другой, поэтому они должны пересылаться между процессорами. Алгоритм выбора отправителя и получателя сохраняет распределение частиц в группах, близкое к равномерному.

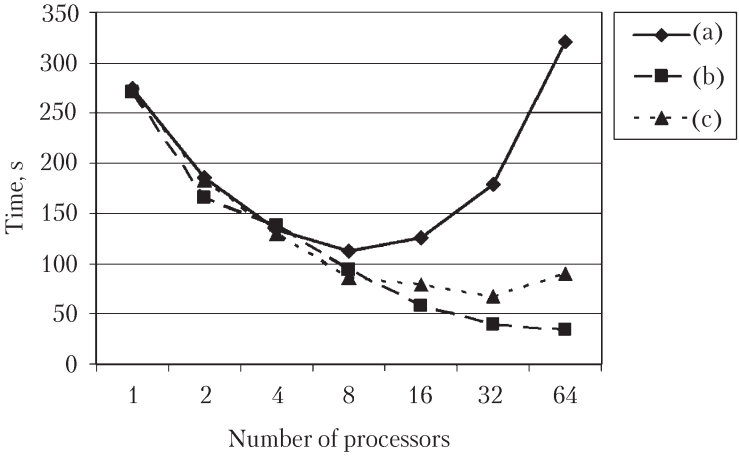


Рис. 4. Время работы программы на основе декомпозиции области:
a — одна подобласть, b — число подобластей равно числу процессоров,
c — три подобласти

Рис. 4 показывает, что когда подобласть обрабатывается группой процессоров (вариант «c»), время работы немного дольше, чем когда каждая подобласть обрабатывается одним процессором (вариант «b»). Но в первом случае есть возможность рассчитывать модель большего размера, что является главной целью параллельной реализации модели протопланетного диска, как было сказано в разделе 3.2.

Двумерные распределения плотности, потенциала и т. д., полученные с помощью квази-3D и 3D программы почти идентичны в том случае, если квази-3D модель корректна. Итак, полностью трехмерная модель необходима, чтобы отслеживать вертикальное движение вещества.

Заключение

Программа для квази-3D модели может рассматриваться как прототип полной параллельной реализации модели протопланетного диска. Программа, основанная на фундаментальном решении, достигает хороших результатов в качестве параллельной реализации модели диска (хорошее ускорение) вследствие сильного упрощения модели. 3D модель в цилиндрической системе

координат ясно демонстрирует все трудности полной 3D реализации модели протопланетного диска. Программа на основе декомпозиции области лучше всего удовлетворяет требованиям модели протопланетного диска: она полностью трехмерная, она теоретически не имеет ограничений на размер сетки и число частиц, она может значительно сократить время вычислений с увеличением числа процессоров.

Литература

1. **Snytnikov V. N., Dudnikova G. I., Gleaves J. T., Nikitin S. A., Parmon V. N., Stoyanovsky V. O., Vshivkov V. A., Yablonsky G. S., Zakharenko V. S.** Space chemical reactor of protoplanetary disk // Space Res. — 2002. — Vol. 30. — № 6. — P. 1461—1467.

2. **Woolfson M. M.** The Origin and Evolution of the Solar System. — Bristol : IoP Publishing, 2000.

3. **D'Alessio P., Calvet N., Hartmann L., Lizano S., Canto J.** Accretion disks around young objects // Astrophysical Journal. — 1999. — Vol. 2 Tests of well-mixed models with ISM dust. — P. 893—909.

4. **Hockney R. W., Eastwood J. W.** Computer Simulation Using Particles. — Bristol : IOP Publishing, 1988.

5. **Grigoryev Yu. N., Vshivkov V. A., Fedoruk M. P.** Numerical «Particle-in-Cell» Methods. Theory and Applications. — VSP. 2002.

6. **Nikitin S. A., Snytnikov V. N., Vshivkov V. A.** Ion-acoustic type instability in protoplanetary disk // Plasma in the Laboratory and in the Universe. AIP Conf. Proc — 2004. — Vol. 703. — P. 280—283.

7. **Snytnikov V. N., Vshivkov V. A., Neupokoev E. V., Nikitin S. A., Parmon V. N., Snytnikov A. V.** Three-Dimensional Numerical Simulation of a Nonstationary Gravitating N-Body System with Gas // Astronomy Letters. — 2004. — Vol. 30. — № 2. — P. 124—138.

8. **Kuksheva E. A., Malyshkin V. E., Nikitin S. A., Snytnikov A. V., Snytnikov V. N., Vshivkov V. A.** Numerical Simulation of Self-Organisation in Gravitationally Unstable Media on Supercomputers. PaCT-2003 proceedings. LNCS 2763. — 2003. — P. 354—368.

9. **Kuksheva E. A., Malyshkin V. E., Nikitin S. A., Snytnikov V. N., Vshivkov V. A.** Supercomputer Simulation of Self-Gravi-

tating Media // Future Generation Computer Systems. — 2005. — Vol. 21. — P. 749—757.

10. **Snytnykov A.** Parallel gravitational solver for protoplanetary disc simulation // Science and Technology, 2003. Proceedings KORUS 2003: The 7th Korea-Russia International Symposium. — 2003. — Vol. 2. — P. 390—395.

11. **Kuksheva E. A., Snytnikov V. N.** Parallel implementation of the fundamental solution for Poisson equation // Vychislitel'nye technologii. — 2005. — Vol. 10. — № 4. — P. 63—71. — [in Russian].

12. **Vshivkov V. A., Snytnikov N. V., Snytnikov V. N.** Simulation of three-dimensional dynamics of matter in gravitational field with the use of multiprocessor computer // Vychislitel'nye technologii. — 2006. — Vol. 11. — № 2. — P. 15—27. — [in Russian].

13. **Snytnikov A. V., Vshivkov V. A.** A Multigrid Parallel Program for Protoplanetary Disc Simulation. PaCT-2005 proceedings. LNCS 3606. — 2005. — P. 457—467.

14. **Demmel J.W.** Applied Numerical Linear Algebra. SIAM. — 1997.

15. **Kraeva M. A., Malyshkin V. E.** Assembly Technology for Parallel Realization of Numerical Models on MIMD-multicomputers // Future Generation Computer Systems. — 2001. — Vol 17. — № 6. — P. 755—765.