Численное решение краевых задач в областях сложной геометрии

И.Е. Смирнов
Томский государственный университет

Рассматривается дискретизация эллиптического уравнения на неструктурированной сетке в рамках метода конечного объема применительно к задаче Дирихле. Расчетная сетка считается заданной, в частности, построенной при помощи сеточного генератора Gmsh с открытым кодом, доступном в Интернете. Анализируются результаты использованных численных методов, применяемых для решения задачи.

Введение

На данный момент большинство методов, разработанных для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, являются сеточными. Важным местом в сеточных методах является построение расчетной сетки. Создание расчетной сетки – это деление интересующей области на маленькие ячейки, в которых нужно найти неизвестные. Развитие численных методов и компьютерных технологий помогает вычислять с помощью компьютеров все более и более сложные задачи.

Обычно реальные инженерные задачи требуют расчетов в областях сложной геометрической формы, что не всегда позволяет построить единую расчетную сетку для всей рабочей области. При построении и использовании неструктурированных сеток современные сеточные генераторы позволяют создать расчетную сетку для разнообразно сложных геометрических объектов за приемлемое время.

В данной работе рассматривается подход к дискретизации уравнения Лапласа на неструктурированных сетках в рамках метода конечного объема применительно к задаче Дирихле. Расчетная сетка считается заданной, в частности, построенной при помощи сеточного генератора Gmsh с открытым кодом, доступным в Интернете. Анализируются результаты использованных численных методов, применяемых для решения задачи.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Требуется определить распределение функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in\left\{(x,y)\in\Re^2\left|\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2<1\right.\right\} \qquad (1)$$

в овале $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2\le 1$ при следующих граничных условиях:

$$u(x,y)\Big|_{\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1}=\varphi(x,y)\Big|_{\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1}. \qquad (2)$$

Выбор и построение сетки. Построение разностной задачи

Для построения сетки в исследуемой области используется некоммерческий пакет GMSH [1], разработанный для построения параметризованных твердотельных моделей, получения сеток, а также для визуализации результатов расчета. Сетка была построена с помощью триангуляции Делоне.

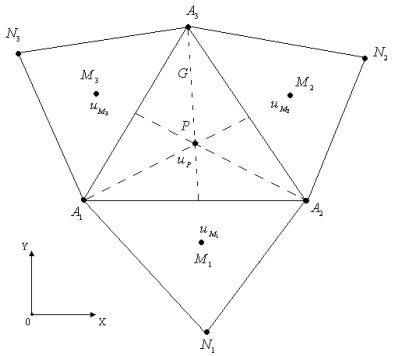

Рис. 1. Фрагмент неструктурированной сетки

Для построения разностной задачи проинтегрируем уравнение (1) по конечному объему *G,* изображенному на рис. 1, где P, M_1, M_2, M_3 – центры тяжести соответствующих треугольников; u_P – значение

скалярной величины u в точке P, A_iA_j – ребра конечного объема G:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \right) dG = 0. \tag{3}$$

Используя формулу Грина, получим следующее уравнение:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \right) dG = \oint\limits_{\partial G} (\vec{n}, gradu) dl = \oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} dl = \tag{4}$$

где $\vec{n}(n_x, n_y)$ – единичный вектор внешней нормали к границе треугольной ячейки ∂G.

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{\partial u}{\partial n_{12}} dl + \int\limits_{A_2}^{A_3} \frac{\partial u}{\partial n_{23}} dl + \int\limits_{A_3}^{A_1} \frac{\partial u}{\partial n_{31}} dl = 0, \tag{5}$$

где $\vec{n}_{ij}$ – единичный вектор внешней нормали к соответствующему ребру конечного объема G ($i, j = 1,2,3, i \neq j$).

По формуле средних прямоугольников

$$\begin{aligned} &\int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{\partial u}{\partial n_{12}} dl + \int\limits_{A_2}^{A_3} \frac{\partial u}{\partial n_{23}} dl + \int\limits_{A_3}^{A_1} \frac{\partial u}{\partial n_{31}} dl \approx \\ &\approx \left(\frac{\partial u}{\partial n_{12}} \right)_{m_{12}} \Delta l_{12} + \left(\frac{\partial u}{\partial n_{23}} \right)_{m_{23}} \Delta l_{23} + \left(\frac{\partial u}{\partial n_{31}} \right)_{m_{31}} \Delta l_{31} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n_{ij}} \right)_{m_{ij}}$ – производная по направлению внешней нормали к конечному объему G на ребре A_iA_j; Δl_{ij} – длина ребра A_iA_j; m_{ij} – середина ребра (рис. 2).

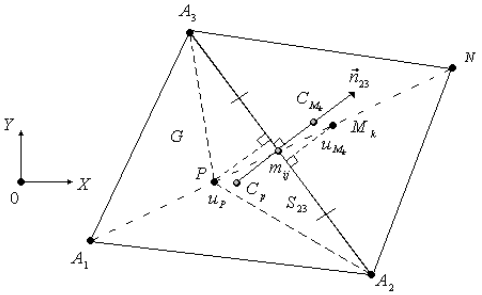

Рис. 2. Фрагмент сетки

Справедливо следующее представление функции u в точках C_p и C_{M_k} с использованием формулы Тейлора:

$$u(C_P) = u(m_{ij}) - \left(\frac{\partial u}{\partial n_{ij}}\right)_{m_{ij}} \Delta n_{ij} + \mathrm{O}(\Delta n_{ij}^2), \tag{7}$$

$$u(C_{M_k}) = u(m_{ij}) + \left(\frac{\partial u}{\partial n_{ij}}\right)_{m_{ij}} \Delta n_{ij} + \mathrm{O}(\Delta n_{ij}^2). \tag{8}$$

Используя выражения (7) и (8), получим:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_{ij}}\right)_{m_{ij}} = \frac{u(C_{M_k}) - u(C_P)}{2\Delta n_{ij}} + \mathrm{O}(\Delta n_{ij}) \cdot \tag{9}$$

Предположим, что $u(C_P) \approx u(P), u(C_{M_k}) \approx u(M_k)$, и, используя (9), получим:

$$\left(\frac{u(M_1) - u(P)}{2\Delta n_{12}}\right)\Delta l_{12} + \left(\frac{u(M_2) - u(P)}{2\Delta n_{23}}\right)\Delta l_{23} + \left(\frac{u(M_3) - u(P)}{2\Delta n_{31}}\right)\Delta l_{31} = 0 \tag{10}$$

или

$$\left(\frac{u(M_1) - u(P)}{4S_{12}}\right)(\Delta l_{12})^2 + \left(\frac{u(M_2) - u(P)}{4S_{23}}\right)(\Delta l_{23})^2 + \left(\frac{u(M_3) - u(P)}{4S_{31}}\right)(\Delta l_{31})^2 = 0.$$

При вычислении производных на примыкающем к границе ребре используются односторонние разности. В итоге получается разностная схема, аппроксимирующая дифференциальную задачу (1)–(2) с первым порядком. С помощью принципа максимума и мажорирующей

функции Гершгорина доказана устойчивость построенной разностной схемы.

Применение численных методов

Для численного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа на неструктурированных сетках использовались: метод Якоби, метод сопряженных градиентов (CG), стабилизирующий метод бисопряженных градиентов (BiCGStab).

При различных вариациях вычислительных сеток получились результаты, представленные в таблице (погрешность вычислений равна 10^{-5}).

Результаты (в итерациях)

Метод	Кол-во ячеек сетки		
	13	1234	4241
Якоби	43	1693	2846
CG	8	133	585
BiCGStab	5	86	398

На рис.3 представлен график сходимости итерационного процесса.

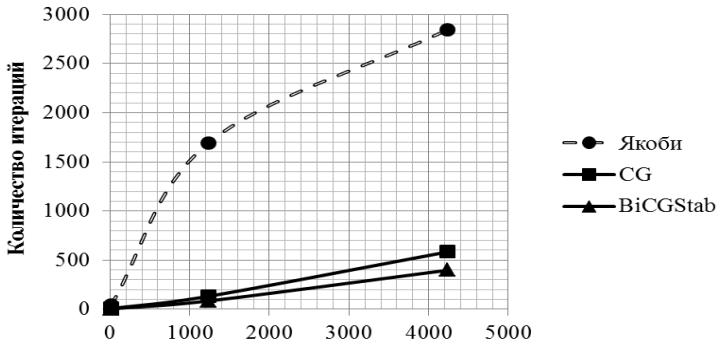

Рис. 3. Сходимость итерационного процесса. По оси *OX* указаны номера сеток: *1* – 13 ячеек; *2* – 1234 ячейки; *3* – 4241 ячейка

С ростом размера расчетной сетки наблюдается увеличение числа обусловленности матрицы, полученной в результате дискретизации исходной задачи. При расчетной сетке в 13 ячеек число обусловленности составляет 18, при сетке 1234 ячейки – 565, а для сетки в 4241 ячейки – 1048. Следовательно, с последующим ростом количества расчетных ячеек потребуется применение методов решения линейных систем с предобуславливанием.

Заключение

В работе рассмотрен способ дискретизации уравнения Лапласа на неструктурированной сетке в рамках метода конечного объема. В качестве конечного объема выбрана ячейка треугольной формы, построенная с помощью триангуляции Делоне, которая позволяет строить расчетные сетки любой сложности. Использование стабилизирующего метода бисопряженных градиентов для решения сеточных уравнений обеспечивает завершение итерационного процесса за меньшее количество итераций.

Литература

1. **Geuzaine C., Remacle J-F**. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities [Электронный ресурс]. – Режим доступа http://geuz.org/gmsh
2. **Wenneker I.** Computation of flows using unstructured staggered grids // Dissertation at Delft University of Technology. 2002. – 208 p.
3. **Фирсов Д.К.** Метод контрольного объема на неструктурированной сетке в вычислительной механике. – Томск: Изд-во ТГУ, 2007. – 46 с.