Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов 5-й степени*

Б.М. Шумилов, Ш.М. Матанов
Томский государственный университет
Ошский государственный университет

Для эрмитовых сплайнов 5-й степени предложен новый тип «ленивых» вейвлетов со смещенным носителем. С использованием расщепления по четным и нечетным узлам получен алгоритм вейвлет-разложения в виде решения трех систем линейных уравнений, из которых одна система трехдиагональная со строгим диагональным преобладанием и две другие системы четырехдиагональные.

Введение

Вейвлетом называется короткая или быстро затухающая волновая функция (всплеск), множество сжатий и смещений которой порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1]. С вычислительной точки зрения наиболее удобны для применения ортонормальные и биортогональные вейвлеты, для которых имеются явные локальные формулы вычисления коэффициентов разложения заданной функции. К недостаткам относится то, что их двойственные (за исключением вейвлетов Хаара) не имеют аналитического представления и графически похожи на фрактальные кривые. Полуортогональные сплайн-вейвлеты образуют иерархический базис в пространстве кусочно-полиномиальных гладких функций (сплайнов). Недостатки состоят в том, что они определены на достаточно большом носителе и для них не существует явных конечных формул, связывающих базисные функции пространства сплайнов на густой сетке, базисные функции на прореженной сетке и вейвлеты. Поэтому при вычислениях предлагалось обходиться приближенными соотношениями для главных коэффициентов разложения либо прибегать к решению системы линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей, для которой не гарантирована хорошая обусловленность.

В [2] уменьшение носителей достигалось построением мультивейвлетов, у которых с каждым узлом связано более одной базисной функции. В [3] для частного случая кубических эрмитовых мультивейвлетов с помощью метода неопределенных коэффициентов были

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-90900 моб_снг_ст).

впервые получены конечные неявные соотношения разложения. После этого [4, 5] алгоритм вычисления сводится к решению независимо двух трехдиагональных систем уравнений со строгим диагональным преобладанием, что предпочтительно с точки зрения распараллеливания вычислений. В данной работе, используя эти идеи, мы докажем существование конечных неявных соотношений разложения для эрмитовых сплайнов 5-й степени и обоснуем эффективный алгоритм вейвлет-анализа на их основе.

Построение «ленивых» эрмитовых сплайн-вейвлетов 5-й степени на конечном отрезке

Пусть пространство V_L является пространством сплайнов степени 5 гладкости C^2 на отрезке $[a, b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L : u_i = a + (b-a)\, i / 2^L,\ i = 0, 1, \ldots, 2^L,\ L \geq 0$, и базисными функциями $N^L_{i,k}(v) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1, 2\ \forall i$, где $v = 2^L (u-a)/(b-a) + 1$, с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами трех функций вида [6] (рис. 1):

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} t^3(6t^2 - 15t + 10) \\ -t^3(3t^2 - 7t + 4) \\ \dfrac{t^3}{2}(t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 0 \leq t \leq 1; \begin{bmatrix} (2-t)^3(6t^2 - 9t + 4) \\ (2-t)^3(3t^2 - 5t + 2) \\ \dfrac{(2-t)^3}{2}(t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\},$$

$$\varphi_k(t) = 0,\ k = 0, 1, 2,\ t \notin [0, 2].$$

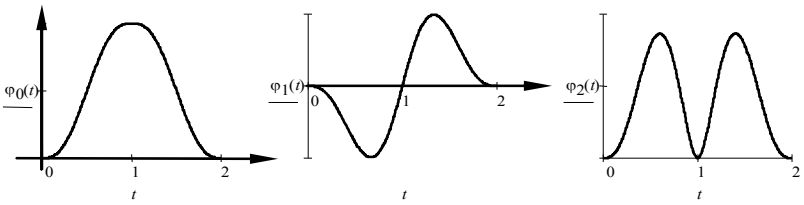

Рис. 1. Графики функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

На любой сетке Δ^L, $L \geq 0$, эрмитов сплайн 5-й степени может быть представлен как

$$S^L(u) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,k} N_{i,k}^L(u), \quad a \leq u \leq b. \tag{1}$$

Если сетка Δ^{L-1} получена из Δ^{L} посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисными функциями $N_{i,k}^{L-1}$, в два раза большими по ширине с центрами в четных целых числах, вложено в V_L. Пространство вейвлетов W_{L-1} определяется как дополнение V_{L-1} до V_L, так что любая функция в V_L может быть записана в виде суммы некоторой функции в V_{L-1} и некоторой функции в W_{L-1}.

В [1] для получения базисных функций в W_{L-1} использовались функции $N^{L}_{i,k}$ в V_L с центрами в нечетных целых числах («ленивые» вейвлеты). Мы предлагаем использовать в качестве вейвлетов для W_{L-1} функции $N^{L}_{i,k}$ в V_L с центрами в четных целых числах. Поскольку W_{L-1} должно являться дополнением V_{L-1} в V_L, размерности этих пространств должны удовлетворять соотношению

$$\text{Dim}\,(V_L) = \text{Dim}\,(V_{L-1}) + \text{Dim}\,(W_{L-1}).$$

Для выполнения этого условия далее будет исследован вариант, когда из исходных координат вычитается уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю вершины при дополнительном условии, что вторая производная в последней точке обращается в нуль.

Будем обозначать базисные сплайн-функции и коэффициенты эрмитового сплайна 5-й степени с отсутствующими элементами по концам отрезка аппроксимации как φ_0^{L} и C_0^{L}. Аналогично обозначим базисные вейвлет-функции как $M^{L}_{i,k} = \varphi_k(v - 2i)$, $k = 0, 1, 2$, $i = 0, 1, \ldots, 2^L$, и запишем их в виде матрицы-строки: $\psi_0^L = \left[M^L_{0,1}, M^L_{0,2}, M^L_{1,0}, M^L_{1,1}, M^L_{1,2}, ..., M^L_{2^L-1,0}, M^L_{2^L-1,1}, M^L_{2^L-1,2}, M^L_{2^L,1} \right]$. Соответствующие вейвлет-коэффициенты будем собирать в вектор: $D_0^L = \left[D_0^{L,1}, D_0^{L,2}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, D_1^{L,2}, ..., D_{2^L-1}^{L,0}, D_{2^L-1}^{L,1}, D_{2^L-1}^{L,2}, D_{2^L}^{L,1} \right]^T$. В результате вейвлет-преобразование может быть записано как [1]

$$C_0^L = \left[P_0^L \,|\, Q_0^L \right] \left[\frac{C_0^{L-1}}{D_0^{L-1}} \right], \qquad (2)$$

где блочная матрица $[P_0^L|Q_0^L]$ составлена из коэффициентов двухмасштабных соотношений [5] и единиц.

Метод расщепления сплайн-вейвлет-разложения

Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении

системы линейных уравнений (2). При этом для распараллеливания вычислений систему (2) целесообразно расщепить по четным и нечетным узлам [4, 5]. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* значения *сплайн-коэффициентов* $C_i^{L,2}$, $C_i^{L,0}$ *и* $C_i^{L,1}$ *в нечетных узлах пересчитаны из последовательного решения трех систем линейных уравнений соответственно вида*

$$\begin{bmatrix} \frac{99}{2} & -4 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & -4 & \frac{111}{2} & \ddots & \\ & & \frac{111}{2} & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & \ddots & -4 \\ & & & \ddots & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{L,2} \\ C_3^{L,2} \\ \vdots \\ C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_1^{L,2} \\ C_3^{L,2} \\ \vdots \\ C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{53}{4} & 8 & \frac{1}{8} & & \\ \frac{1}{8} & 8 & \frac{111}{8} & \ddots & \\ & & \frac{111}{8} & \ddots & \\ & & \frac{1}{8} & \ddots & 8 \\ & & & \ddots & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{L,0} \\ C_3^{L,0} \\ \vdots \\ C_{2^L-1}^{L,0} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_1^{L,0} - C_1^{L,2} \\ C_3^{L,0} - C_1^{L,2} \\ C_5^{L,0} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,0} - C_{2^L-1}^{L,2} \\ C_{2^L-1}^{L,0} - C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{111}{16} & \frac{1}{16} & & \\ \frac{1}{16} & \frac{55}{8} & \ddots & \\ & \frac{1}{16} & \ddots & \frac{1}{16} \\ & & \ddots & \frac{111}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{L,1} \\ C_3^{L,1} \\ \vdots \\ C_{2^L-1}^{L,1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_1^{L,1} + 15C_1^{L,0} + C_1^{L,2} \\ C_3^{L,1} - 15C_1^{L,0} - C_1^{L,2} \\ C_5^{L,1} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,1} + 15C_{2^L-1}^{L,0} + C_{2^L-1}^{L,2} \\ C_{2^L-1}^{L,1} - 15C_{2^L-1}^{L,0} - C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор сплайн-коэффициентов на прореженной сетке Δ^{L-1} *представляет собой результат умножения матрицы*

$$\begin{bmatrix}
-150 & -16 & -168 & & & & & & & & & & \\
-1260 & 0 & -1960 & & & & & & & & & & \\
4 & -1 & 2 & 16 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & & & & \\
30 & -8 & 14 & 0 & -8 & 0 & -30 & 0 & -14 & \ddots & & & \\
180 & -48 & 76 & 0 & 48 & 64 & 180 & 0 & 76 & \ddots & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 20 & 1 & 24 & \ddots & & & \\
 & & & & -8 & 0 & 0 & -8 & 0 & \ddots & & & \\
 & & & & -48 & 0 & -360 & 48 & -1048 & \ddots & & & \\
 & & & & & & 4 & -1 & 2 & \ddots & 16 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 30 & -8 & 14 & \ddots & 0 & -8 & 0 \\
 & & & & & & 180 & -48 & 76 & \ddots & 0 & 48 & 64 \\
 & & & & & & & & & \ddots & 0 & -16 & 0
\end{bmatrix}$$

на вектор, $\left[C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, C_1^{L,2}, ..., C_{2^L-1}^{L,2}\right]^T$, *сплайн-коэффициентов в нечетных узлах густой сетки* Δ^L, *тогда как вектор вейвлет-коэффициентов равен такому же произведению с матрицей*

$$\begin{bmatrix}
75 & 8 & 84 & & & & & & & & & & \\
315 & 0 & 490 & & & & & & & & & & \\
-4 & 1 & -2 & -16 & -1 & 0 & -4 & 0 & -2 & & & & \\
-15 & 4 & -7 & 0 & 4 & 0 & 15 & 0 & 7 & \ddots & & & \\
-45 & 12 & -19 & 0 & -12 & -16 & -45 & 0 & -19 & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & 0 & -20 & -1 & -24 & \ddots & & & \\
 & & & & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & \ddots & & & \\
 & & & & 12 & 0 & 90 & -12 & 262 & \ddots & & & \\
 & & & & & & -4 & 1 & -2 & \ddots & -16 & -1 & 0 \\
 & & & & & & -15 & 4 & -7 & \ddots & 0 & 4 & 0 \\
 & & & & & & -45 & 12 & -19 & \ddots & 0 & -12 & -16 \\
 & & & & & & & & & \ddots & 0 & 8 & 0
\end{bmatrix}$$

при условии добавления к результату вектора $\left[C_0^{L,1}, C_0^{L,2}, C_2^{L,0}, C_2^{L,1}, C_2^{L,2}, ..., C_{2^L}^{L,1}\right]^T$ *сплайн-коэффициентов в четных узлах густой сетки.*

Пример. Рассмотрим в качестве тестовой функции функцию Хартена [7]:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(3\pi x), & x\le\frac{1}{3},\\ \left|\sin(4\pi x)\right|, & \frac{1}{3}<x\le\frac{2}{3},\\ -\frac{1}{2}\sin(3\pi x), & x>\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Это кусочно-гладкая функция, имеющая разрывы первого рода в точках $x=1/3$ и 2/3 и угол (разрыв первой производной) в точке $x=1/2$. Ее первая и вторая производные – также кусочно-гладкие функции.

На рис. 2 представлены результаты реконструкции коэффициентов эрмитового сплайна 5-й степени $S^5(x)$ при условии обнуления незначимых вейвлет-коэффициентов $D_0{}^3(12)$, $D_0{}^3(13)$ и $D_0{}^4(18)$, $D_0{}^4(22)$, $D_0{}^4(28)$, $D_0{}^4(30)$. Здесь сплошной линией обозначаются исходная функция и ее производные. Попытка обнуления следующих по абсолютной величине вейвлет-коэффициентов $D_0{}^4(2)$, $D_0{}^4(6)$, $D_0{}^4(9)$, $D_0{}^4(39)$, $D_0{}^4(42)$ приводит к некоторому ухудшению качества воспроизведения первой производной и заметному искажению самой функции в окрестности третьего узла (последняя часть рисунка). Поведение второй производной при этом совершенно не изменяется.

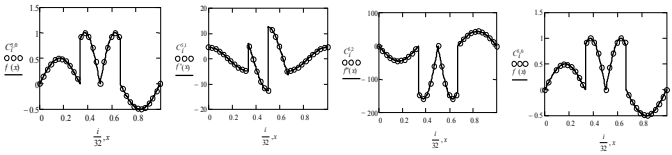

Рис. 2. Графики вейвлет-реконструкции коэффициентов эрмитового сплайна 5-й степени

Заключение

Можно предложить параллельную реализацию представленного в статье алгоритма вейвлет-преобразования, в которой три прямых хода прогонки выполняются независимо, а три обратных хода выполняются с максимальным запаздыванием на два такта. Это предоставляет возможность эффективного использования эрмитовых сплайн-вейвлетов 5-й степени на современных процессорах с многоядерной архитектурой.

Литература

1. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.
2. **Strela V. Multiwavelets**. Theory and Applications. – Massachusetts Institute of Technology, 1996. – 99 p. Submitted to the Department of Mathematics in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics.
3. **Шумилов Б.М., Эшаров Э.А.** Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. Приложения. – 2006. – № 19. – С. 260–266.
4. **Шумилов Б.М.** Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Механика. – 2010. – № 4(12). – С. 45–55.
5. **Шумилов Б.М.** «Ленивые» вейвлеты эрмитовых кубических сплайнов и алгоритм с расщеплением // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1(14). – С. 64–72.
6. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
7. **Aràndiga F., Baeza A., Donat R.** Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2004. – Vol. 9. – P. 263–273.