Преобразование, сжатие и улучшение данных на прямоугольной сетке бикубическими мультивейвлетами

Э.А. Эшаров, Б.М. Шумилов, У.С. Ысманов, Ж. Абдыкалык кызы
Томский государственный архитектурно-строительный университет
Ошский государственный университет

Для аппроксимации функций двух переменных бикубическими сплайнами рассматривается применение метода наименьших квадратов на основе разложения по бикубическим мультивейвлетам. Приведены результаты численных экспериментов.

Введение

В конце прошлого века возникло и успешно развивается новое и важное направление в теории и технике обработки сигналов, изображений и временных рядов, получившее название вейвлет-преобразования (ВП), которое хорошо приспособлено для изучения структуры неоднородных процессов. Термин «вейвлет» (wavelet) ввели в своей статье Гроссманн (Grossmann) и Морле (Morlet) в середине 80-х годов XX в. в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов. Их работа послужила началом интенсивного исследования вейвлетов в последующее десятилетие рядом ученых таких, как Добеши (Dobechies), Мейер (Meyer), Малл (Mallat), Фарж (Farge), Чуи (Chui) и др.

В математическом смысле вейвлетом называется малая, т.е. быстро затухающая волновая функция, множество сжатий и смещений которой порождает пространство ограниченных функций на всей числовой оси [1–3]. За счет сжатия вейвлеты способны выявить с разной степенью подробности различие в характеристиках измеренного сигнала, а путем сдвига проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. Поэтому вейвлеты называют математическим микроскопом. При анализе нестационарных сигналов за счет свойства локальности вейвлеты обеспечивают существенное преимущество перед преобразованием Фурье, которое дает только глобальные сведения о частотах исследуемого сигнала, поскольку используемые при этом базисные функции (синусы и косинусы) определены на бесконечном носителе. И. Добеши впервые построила ортонормальные вейвлеты неполиномиального типа с компактным носителем [1].

Чуи с соавт. построили полуортогональные сплайн-вейвлеты [2]. Коэн с соавт. построили биортогональные вейвлеты [3].

Недостатками данных вейвлетов является то, что они не имеют аналитического представления и графически похожи на фрактальные кривые либо определены на достаточно большом носителе. И то и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения задач численного анализа. В ряде работ уменьшение носителя достигалось построением эрмитовых сплайн-мультивейвлетов, у которых с каждым узлом связано более одной базисной функции. В частности, в [4] были построены полуортогональные кубические мультивейвлеты на суперкомпактном носителе, равном носителю базисного сплайна.

В данной работе рассматривается вычисление бикубических эрмитовых сплайнов на основе разложения по бикубическим мультивейвлетам и приведены численные примеры использования метода наименьших квадратов для аппроксимации данных с пропусками.

Вейвлет-разложение бикубических эрмитовых сплайнов в прямоугольной области

Пусть пространство V^L, $L=[L_1,L_2]$, является тензорным пространством двумерных эрмитовых кубических сплайнов на прямоугольнике $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^{Lj}: u_{ii} = a_i + (b_i - a_i)\, i / 2^{Lj}$, $i = 0, 1,\ldots, 2^{Lj}$, $L_i \geq 0$, $j=1,2$ по каждому направлению и всевозможными произведениями функций $N^{Lj}_{i,k}(v) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1\ \forall i$, где $v = 2^{Lj}(u - a_j) / (b_j - a_j) + 1$, порожденных сжатиями и сдвигами двух масштабирующих функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ (рис. 1) в качестве базисных функций [5]:

$$\phi_0(t) = \begin{cases} t^2(3-2t), & 0 \le t \le 1, \\ (2-t)^2(2t-1), & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t \notin [0,2]; \end{cases}$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} -t^2(1-t), & 0 \le t \le 1, \\ (2-t)^2(t-1), & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t \notin [0,2]. \end{cases}$$

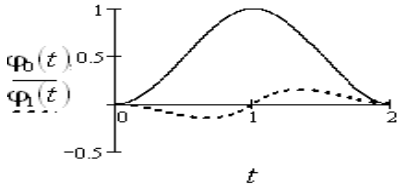


Рис. 1. Графики масштабирующих функций φ_0, φ_1

Тогда эрмитова бикубическая сплайн-поверхность может быть представлена как

$$\overline{S}^{L}(u,v)=\sum_{i=0}^{2^{L_1}}\sum_{j=0}^{2^{L_2}}\overline{C}_{i,j}^{L,0,0}N_{i,0}^{L_1}(u)N_{j,0}^{L_2}(v)+\sum_{i=0}^{2^{L_1}}\sum_{j=0}^{2^{L_2}}\overline{C}_{i,j}^{L,0,1}N_{i,0}^{L_1}(u)N_{j,1}^{L_2}(v)+$$
$$+\sum_{i=0}^{2^{L_1}}\sum_{j=0}^{2^{L_2}}\overline{C}_{i,j}^{L,1,0}N_{i,1}^{L_1}(u)N_{j,0}^{L_2}(v)+\sum_{i=0}^{2^{L_1}}\sum_{j=0}^{2^{L_2}}\overline{C}_{i,j}^{L,1,1}N_{i,1}^{L_1}(u)N_{j,1}^{L_2}(v), \quad (1)$$

где $N_{i,k}^{L_1}(u)$ и $N_{j,k}^{L_2}(v)$ являются базисными эрмитовыми сплайнами для направлений u и v соответственно. Здесь коэффициенты $\overline{C}_{i,j}^{L,k,l}=\gamma_{i,j}^{(k,l)}, k,l=0,1,$ являются соответствующими составляющими координат контрольных точек и направляющих косинусов касательной к поверхности в узлах сетки $\Delta^{L_1}\times\Delta^{L_2}$.

Вейвлет-пространство W^{L-1} определяется как ортогональное дополнение V^{L-1} до V^{L} по отношению к определенному скалярному произведению. В этом случае пространство V^{L} может быть представлено в виде прямой суммы V^{L-1} и W^{L-1}: $V^{L}=V^{L-1}\oplus W^{L-1}$. Для случая неограниченного интервала $(-\infty, \infty)$ одномерные базисные функции W^{L-1}, имеющие суперкомпактный носитель [0, 2], получены в [4] относительно скалярного произведения $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)g'(t)dt$ (рис. 2):

$$\psi_0(t)=-2\phi_0(2t)+4\phi_0(2t-1)-2\phi_0(2t-2)-21\phi_1(2t)+21\phi_1(2t-2), \quad (2)$$

$$\psi_1(t)=\phi_0(2t)-\phi_0(2t-2)+9\phi_1(2t)+12\phi_1(2t-1)+9\phi_1(2t-2). \quad (3)$$

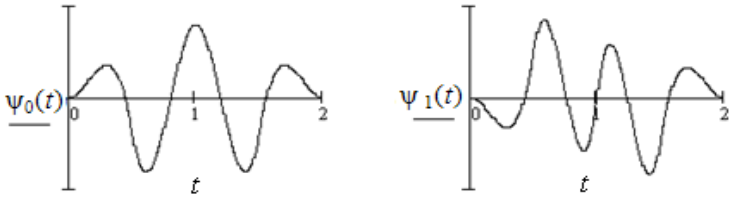
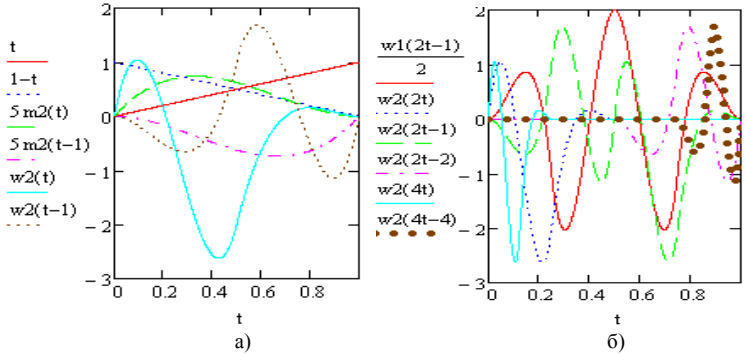


Рис. 2. Графики симметричного и несимметричного «материнских» вейвлетов $\psi_0(t), \psi_1(t)$

Часто ограничиваются рассмотрением периодического случая, когда совпадают первая и последняя контрольные точки по каждому направлению. Это соответствует аппроксимации замкнутых поверхностей. Для незамкнутых поверхностей с целью сохранения свойства полуортогональности по каждому частному направлению можно было бы вычесть из исходных координат уравнение билинейной смешанной поверхности, соединяющей частичные кубические эрмитовы сплайны, интерполирующие данные на каждой стороне. Тогда исправленные значения координат и частных производных по краям обнуляются, и после их подгонки, например, согласно методу наименьших квадратов, к полученным в результате подгонки коэффициентам бикубического эрмитового сплайна требуется добавить вычтенное ранее уравнение.

Результаты численных экспериментов

Мы рассматривали более простое решение, когда для построения тензорного произведения в одномерный базис кубических мультивейвлетов добавляются две линейные базисные функции по краям отрезка аппроксимации (рис. 3).



а) б)

Рис. 3. Графики базисных функций на первом (*а*) и втором (*б*) уровнях разложения по кубическим мультивейвлетам

На рис. 4 представлен график восполнения построенного бикубического сплайна на густую прямоугольную сетку, а также результат наложения исходных точек на полученную сплайн-поверхность. На рис. 5 представлен соответствующий график стандартизированных ошибок аппроксимации метода наименьших квадратов, позволяющий указать точки дискретно заданной двумерной поверхности, рекомендуемые для фильтрации.

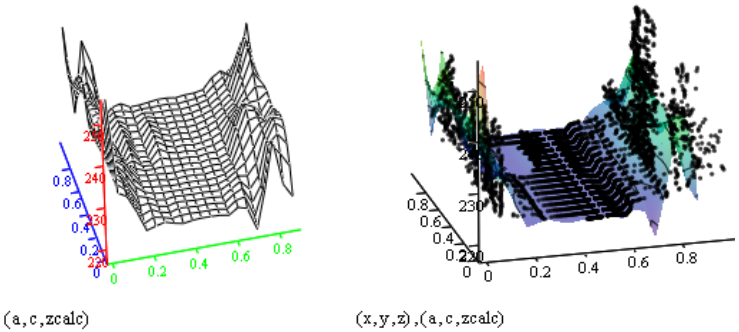


Рис. 4. График восполнения бикубического сплайна и результат наложения исходных точек на полученную поверхность

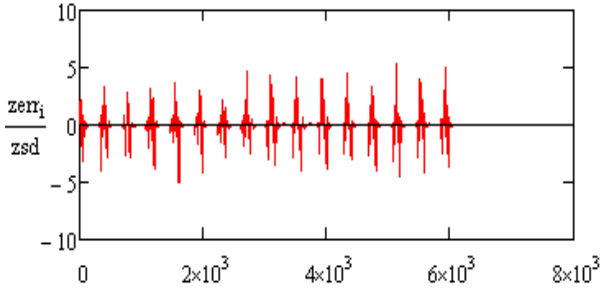


Рис. 5. График стандартизированных ошибок аппроксимации для бикубических вейвлетов

Литература

1. **Cohen A. Doubeshies, Vial P.** Wavelets on the interval and fast wavelet transforms // Appl. Comput. Harmonic Anal. – 1993. – Vol. 1. – P. 54–81.
2. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.
3. **Dahmen W., Jia R,Q., Kunoth A.** Biorthogonal multiwavelets on the interval: Cubic Hermite splines // Constr. Approx. – 2000. – Vol. 16. – P. 221–259.
4. **Jia R.-Q., Liu S.-T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. – 2006. – Vol. 25. – P. 23–39.
5. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 352 с.