Применение билинейных сплайн-вейвлетов для аппроксимации поверхностей*

А.Ж. Кудуев, Б.М. Шумилов
Ошский государственный университет
Томский государственный архитектурно-строительный университет

Для аппроксимации билинейными сплайнами функций двух переменных, определенных в прямоугольной области, предложено использовать разложение по базису неортогональных вейвлетов. Для случая прямоугольной таблицы значений функции алгоритм аппроксимации сводится к серии одномерных вейвлет-преобразований по строкам и столбцам таблицы. Для случая непрямоугольной таблицы предлагается использовать метод наименьших квадратов. Обсуждаются способы удаления незначащих коэффициентов разложения с целью сжатия таблиц и сглаживания результирующих поверхностей. Представлены результаты численных экспериментов.

Введение

Билинейное пространство вейвлетов определяется как тензорное произведение пространств сплайн-вейвлетов 1-й степени по каждой переменной. Наилучшим из таковых является пространство полуортогональных сплайн-вейвлетов, определяемых как подмножество сплайнов на густой сетке, ортогональных пространству сплайнов на прореженной сетке [1]. Неортогональные сплайн-вейвлеты [2], определяемые из условия ортогональности многочленам 1-й степени, не на много уступают по качеству сжатия полуортогональным сплайн-вейвлетам, но имеют менее заполненные матрицы вейвлет-преобразования. Преимущество перехода к вейвлет-коэффициентам состоит в том, что часто большое количество коэффициентов оказывается очень малым по величине. Удаление этих малых коэффициентов приводит лишь к незначительным погрешностям при воспроизведении таблицы заданных значений, являя форму сжатия «с потерями».

Если таблица прямоугольная, то использование стандартного подхода соответствует одномерному вейвлет-преобразованию каждой строки значений таблицы. В результате получаются коэффициенты усредняющей прямой и вейвлет-коэффициенты для каждой строки таблицы. Затем эти преобразованные строки рассматриваются так, как

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-08-90902 моб_снг_ст.).

если бы они сами являлись данными, и применяется одномерное преобразование к каждому столбцу полученной таблицы. Полученные в результате значения оказываются коэффициентами для базиса, образованного всевозможными тензорными произведениями функций одномерного базиса, четыре из которых представляют усредняющую билинейную поверхность. При этом вейвлет-функции стандартно построенного базиса имеют прямоугольные носители.

Если таблица непрямоугольная и имеет пропуски данных, то коэффициенты билинейного сплайна приходится отыскивать согласно какому-либо универсальному методу аппроксимации. Переход здесь к разложению по вейвлетам принципиально улучшает обусловленность решения, поскольку вейвлеты преобразуют систему базисных сплайн-функций с распределенными параметрами в систему с сосредоточенными вейвлет-параметрами. Применение для аппроксимации метода наименьших квадратов позволяет определить статистическую меру значимости каждого коэффициента согласно критерию *t* Стьюдента для того, чтобы решить, какие вейвлет-коэффициенты должны быть удалены.

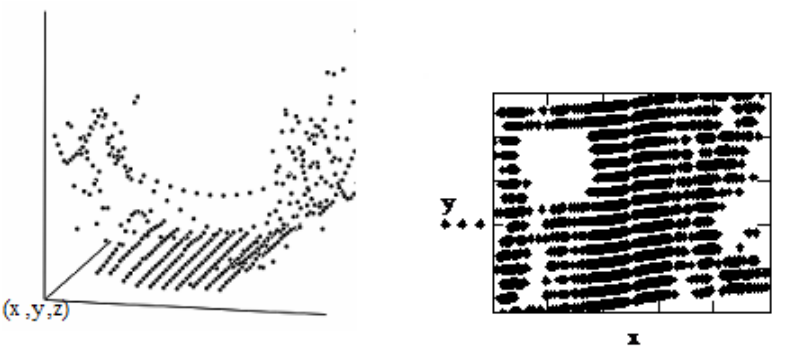
Сглаживание данных лазерного сканирования поверхностей автомобильных дорог

Зачастую расположение предписанных пользователем точек поверхности отличается от узлов прямоугольной сетки и их число значительно больше, чем число коэффициентов сплайна. Например, на рис. 1 показано множество точек (x, y, z), представляющих материалы лазерного сканирования поверхности автомобильной дороги [3], где *а* – «облако» точек сканирования, *б* – горизонтальные проекции точек. Здесь $x=\{x_i,\ i=0,1,\ldots\}$ – локальные координаты точек в поперечном сечении дороги; $y=\{y_i, i=0,1,\ldots\}$ – продольные координаты; $z=\{z_i, i=0,1,\ldots\}$ – координаты рельефа дорожной поверхности (высоты над уровнем моря).

Поскольку данные имеют два преимущественных направления: вдоль и поперек дороги, возникает естественное желание использовать для их аппроксимации параметрические сплайны двух переменных. Поэтому ставится задача трансформировать изгибы автомобильной дороги в прямоугольную область (рис. 2, 3), на которой задано множество точек сканирования *x, y, z*. Предлагаемый алгоритм [4] состоит из четырех шагов.

1. На поверхности рассмотрим семейство линий, обладающих следующими свойствами:

1) Никакие две линии не имеют между собой общих точек. 2) Начало и конец каждой линии находятся в точках, расположенных на противоположных участках границы; два других участка границы включаются в число рассматриваемых линий. Практически построение упомянутого семейства линий сводится к выделению из множества заданных точек поверхности упорядоченных подмножеств L_k.



а) б)

Рис. 1

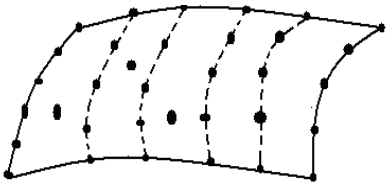


Рис. 2

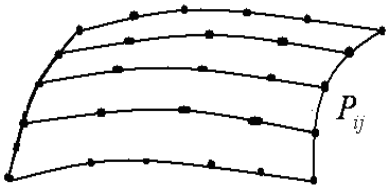


Рис. 3

2. Для каждого подмножества L_k найдем интерполирующий его параметрический сплайн $S_k(x,\bar{s})$, $S_k(y,\bar{s})$, $S_k(z,\bar{s})$ с использованием нормированной параметризации по суммарной длине хорд. На отрезке изменения параметра $\bar{s}[0,1]$ введем равномерную сетку узлов Δ_v: $v_j = j / 2^{Lv}, j = 0, 1,\ldots, 2^{Lv}, L_v \geq 0$, и вычислим координаты точек $P_{kj}^{(1)}\left\{S_k(x,v_j),\ S_k(y,v_j),\ S_k(z,v_j)\right\},\ j=0,\ldots,2^{Lv};\ k=0,\ldots,N_0$.

3. Для каждого j=0,…, 2^{Lv} построим параметрические сплайны $\bar{S}_j(x,\bar{s})$, $\bar{S}_j(y,\bar{s})$, $\bar{S}_j(z,\bar{s})$, интерполирующие точки

$P_{1j}^{(1)}, P_{2j}^{(1)}, ..., P_{N_{0,j}}^{(1)}$. Вновь используется нормированная параметризация по суммарной длине хорд. Далее введем сетку Δ_u: $u_i = i / 2^{Lu}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^{Lu}$, $L_u \geq 0$, и определим координаты точек $P_{i,j}\left(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}\right)$:

$x_{ij} = \overline{S}_j\left(x; u_i\right)$, $y_{ij} = \overline{S}_j\left(y; u_i\right)$, $z_{ij} = \overline{S}_j\left(z; u_i\right)$, $i = 0, ..., 2^{Lu}$, $j = 0, ..., 2^{Lv}$.

4. В области [0,1]x[0,1] образуем сетку $\Delta = \Delta_u x \Delta_v$. В качестве декартовых координат поверхности в её узлах (u_i, v_j) принимаем значения x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}. Интерполируя их на сетке Δ, получаем для координат искомой поверхности следующие формулы:

$$x = S\left(x; u, v\right), \; y = S\left(y; u, v\right), \; z = S\left(z; u, v\right).$$

Наличие пропусков данных на проезжей части, вызываемых экранированием проезжающими мимо автомобилями, и разным числом точек на отдельных сканах, вызываемым потерей данных на придорожном ландшафте и повторными отражениями от находящихся на объекте людей, техники, растительности и т. д., осложняет ситуацию. Мы рассматриваем вариант, когда коэффициенты построенного сплайна отыскиваются согласно методу наименьших квадратов, а именно:

$$\sum_i \left[\left(x_i - S\left(x; u_i, v_i\right)\right)^2 + \left(y_i - S\left(y; u_i, v_i\right)\right)^2 + \left(z_i - S\left(z; u_i, v_i\right)\right)^2 \right] \to \min_{x,y,z}.$$

Вейвлет-разложение двумерного билинейного сплайна имеет вид

$$\overline{S}^L\left(u, v\right) = \varphi_u^{L_1} \overline{C}^L \left[\varphi_v^{L_2}\right]^T = \varphi_u^0 \overline{C}_{[0,0]}^{[0,0]} \left[\varphi_v^0\right]^T + \sum_{j=0}^{L_v - 1} \varphi_u^0 \overline{E}_{[0,1]}^{[0,j]} \left[\psi_v^j\right]^T +$$

$$+ \sum_{i=0}^{L_u - 1} \psi_u^i \overline{F}_{[1,0]}^{[i,0]} \left[\varphi_v^0\right]^T + \sum_{i=0}^{L_u - 1} \sum_{j=0}^{L_v - 1} \psi_u^i \overline{D}_{[1,1]}^{[i,j]} \left[\psi_v^j\right]^T,$$

где нижние и верхние индексы у матриц $\overline{C}_{[0,0]}^{[0,0]}, \overline{E}_{[0,1]}^{[0,j]}, \overline{F}_{[1,0]}^{[i,0]}, \overline{D}_{[1,1]}^{[i,j]}$ указывают начальные и конечные значения нумерации строк и столбцов.

Здесь коэффициенты сплайна $\overline{C}_{i,j}^L$ собираются в матрицу вида

$$\overline{C}^L = \begin{bmatrix} \overline{C}_{0,0}^L & \overline{C}_{0,1}^L \ldots & \overline{C}_{0,2^{L_2}}^L \\ \overline{C}_{1,0}^L & \overline{C}_{1,1}^L \ldots & \overline{C}_{1,2^{L_2}}^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{C}_{2^{L_1},0}^L & \overline{C}_{2^{L_1},1}^L \ldots & \overline{C}_{2^{L_1},2^{L_2}}^L \end{bmatrix}.$$

Выражение $\varphi_u^0 \overline{C}_{[0,0]}^{[0,0]} \left[\varphi_v^0\right]^T$ представляет собой запись усредняющей билинейной поверхности; базисные сплайн-функции и вейвлет-

функции на данном уровне L записываются в виде двух матриц-строк: $\varphi_u^{L_u} = \left[N_0^{L_u}, N_1^{L_u}, ..., N_{2^{L_u}}^{L_u} \right]$, $\psi_u^{L_u} = \left[M_1^{L_u}, ..., M_{2^{L_u-1}}^{L_u} \right]$ и $\varphi_v^{L_v} = \left[N_0^{L_v}, N_1^{L_v}, ..., N_{2^{L_v}}^{L_v} \right]$, $\psi_v^{L_v} = \left[M_1^{L_v}, ..., M_{2^{L_v-1}}^{L_v} \right]$, для направлений u и v, соответственно, и $N^L{}_i(v) = \varphi_1(v-i)\ \forall i$, $M^L{}_1(v) = \Psi_{21}(v-1)$, $M^L{}_i(v) = \Psi_2(v-i)$, $i = 2, 3, \ldots, 2^{L-1}-1$, $M^L_{2^{L-1}}(v) = \Psi_{21}\left(2^L - v + 1\right)$, $v = 2^L u + 1$, по каждому направлению;

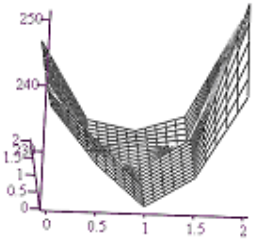
$$\varphi_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 2-t, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t \notin [0,2]; \end{cases}$$

$$\Psi_{21}(t) = \frac{\sqrt{3}}{9}\left(6\sqrt{2^L}\phi_1(2t+1) - 5\phi_1(2t) + 2\phi_1(2t-1)\right),$$

$$\Psi_2(t) = \frac{1}{2}\phi_1(2t+1) - \phi_1(2t) + \frac{1}{2}\phi_1(2t-1).$$

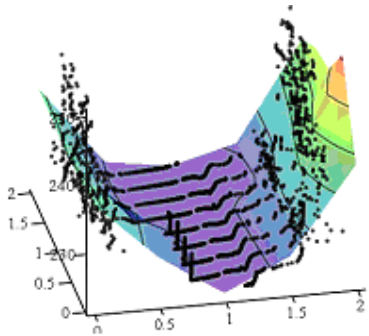
Результаты численных экспериментов

На рис. 4, 5 представлен график билинейного сплайн-восполнения полученного МНК-вейвлет-разложения на густую прямоугольную сетку, а также результат наложения исходных точек на полученную поверхность.



(a,c,zcalc)

Рис. 4



(x,y,z),(a,c,zcalc)

Рис. 5

На рис. 6 представлен соответствующий график стандартизированных ошибок аппроксимации, позволяющий указать точки скана, не принадлежащие проезжей части и рекомендуемые для фильтрации.

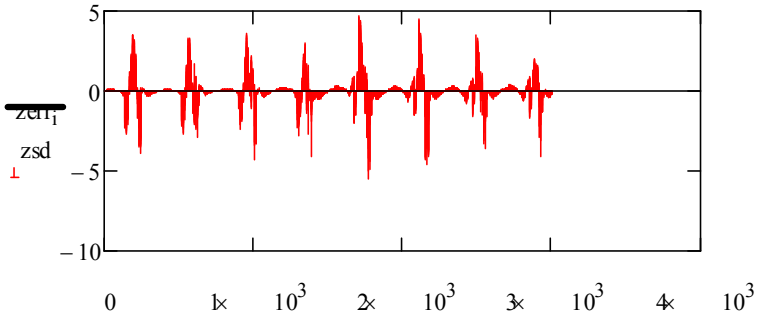


Рис. 6

Литература

1. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.
2. **Koro K., Ade K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2001. – Vol. 25. – P. 149–164.
3. **Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Байгулов А.Н., Колупаева С.Н.** Предварительная обработка материалов лазерного сканирования автомобильных дорог // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2011. – № 3. – С. 153–163.
4. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 352 с.