Новые типы полуортогональных мультивейвлетов с суперкомпактными носителями и их применение в численном анализе*

Д.А. Турсунов, Б.М. Шумилов
Ошский государственный университет
Томский государственный архитектурно-строительный университет

Рассматривается построение базисных вейвлетов в пространствах эрмитовых сплайнов нечетной степени. Представлены результаты численных экспериментов по их применению для решения дифференциальных уравнений.

Слово «вейвлет» означает в переводе малую, т.е. быстро затухающую волну (всплеск). В математике этим словом называется волновая функция, множество сжатий и смещений которой порождает пространство ограниченных функций на всей числовой оси [1–3]. За счет сжатия вейвлеты способны выявить с разной степенью подробности различие в характеристиках измеренного сигнала, а путем сдвига проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. Поэтому вейвлеты иногда называют «математическим микроскопом». При решении задач численного анализа, поскольку вейвлеты преобразуют систему базисных функций с распределенными параметрами в систему с сосредоточенными параметрами, такой базис оказывается гораздо более эффективным с точки зрения обусловленности и сходимости. И. Добеши [1] впервые построила ортонормальные относительно обычного скалярного произведения вейвлеты неполиномиального типа с компактными носителями. Коэн с соавт. построили биортогональные вейвлеты [2]. Недостатками данных вейвлетов является то, что они не имеют аналитического представления и графически похожи на фрактальные кривые. Ограничившись ортогональностью к пространству сплайн-разложений на прореженной сетке, Чуи с соавт. построили полуортогональные сплайн-вейвлеты [3]. Однако недостатком является то, что эти вейвлеты определены на достаточно широком носителе. В работах [4, 5] с помощью вейвлетов Лежандра численно решены интегральное уравнение Абеля и дифференциальное уравнение типа Лане–Эмдета.

В данной статье, используя эти идеи, мы построим базисные вейвлеты на пространствах эрмитовых сплайнов нечетной степени. В

* Работа выполнена при поддержке РФФИ по проекту №11-07-90903_моб_снг_ст.

отличие от классических вейвлетов они обеспечивают выполнение свойства полуортогональности относительно скалярного произведения с производными, причем имеют суперкомпактный носитель, равный носителю базисных сплайнов. И то и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения дифференциальных уравнений по способу Галеркина.

Введем обозначения: R, Z, N – множество действительных, целых и натуральных чисел соответственно; $L_2(R)$ – линейное пространство квадратично-интегрируемых вещественных функций на R; $\langle u,v\rangle := \int_{\mathbf{R}} u(x)v(x)\,dx,\ u(x),v(x)\in L_2(\mathbf{R})$ – скалярное произведение; если $\langle u, v\rangle=0$, то функции u, v называются ортогональными; $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ – норма функции f в $L_2(R)$;

Π_k – множество многочленов степени k (k=0,1,2,…); S_m – пространство эрмитовых сплайнов ($2m$+1)-й степени, удовлетворяющих следующим условиям, ($m > 0$):

а) $s\in C[R]\cap C^1[R]\cap C^2[R]\cap\ldots\cap C^m[R]$;

б) $s(x)\in\Pi_{2m+1},\ x\in(j,j+1),\ j\in Z$.

Пусть $\phi_\alpha, \alpha=\overline{0,m}$ – базисные эрмитовы сплайны ($2m$+1)-й степени:

$$\phi_\alpha(t)=\begin{cases}\omega_\alpha(t) & \text{при}\quad -1\le t\le 0,\\ \xi_\alpha(t) & \text{при}\quad 0\le t\le 1,\end{cases}\quad\text{где}\ \omega_\alpha(t)=(1-t)^{m+1}\sum_{\beta=0}^{m-\alpha}\frac{(m+\beta)!}{\alpha!\,\beta!\,m!}t^{\alpha+\beta},$$

$$\xi_\alpha(t)=(-1)^\alpha\,\omega_\alpha(-t),\quad \alpha=\overline{0,m}.$$

Метод построения полуортогональных сплайн-вейвлетов

Основой для построения вейвлет-преобразования является некоторый набор вложенных пространств. Пусть S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное φ_α, α=0,1,…,m (т.е. S – это пространство эрмитовых сплайнов ($2m$+1)-й степени на бесконечно продолженной в обе стороны сетке с шагом 1). Функция g принадлежит пространству S тогда и только тогда, когда существуют последовательности b_α, α=0,1,…,m на Z, для которых выполняется равенство: $g=\sum_{j\in Z}\left[\sum_{k=0}^{m}b_k(j)\varphi_k(\cdot-j)\right]$.

Пусть $S_1=\{g(2\cdot),\ g\in S\}$ – пространство сплайнов на более густой сетке с шагом ½; тогда $S\subset S_1$. Между S_1 и S остается пространство (разность), которое заполняется вейвлетами.

В этом пространстве будем искать такие функции, которые ортогональны S относительно m-х производных, т.е. мы требуем выполнение равенств:

$$\left\langle \psi_0^{(m)}, \phi_k^{(m)}(\cdot - j) \right\rangle = \left\langle \psi_1^{(m)}, \phi_k^{(m)}(\cdot - j) \right\rangle = \ldots$$
$$\ldots = \left\langle \psi_k^{(m)}, \phi_k^{(m)}(\cdot - j) \right\rangle = 0, \ \forall j \in Z, \ k = \overline{0,m}. \qquad (1)$$

Предположим, что $\psi(x) = \sum_{j \in Z} \left[\sum_{k=0}^{m} b_k(j) \phi_k(2x - j) \right], x \in R$. Введем преобразование Лапласа последовательностей b_k, $k = \overline{0,m}$ на Z, так что положительная или отрицательная степень z означает сдвиг на один шаг по шаблону узлов эрмитового сплайна вправо или влево, соответственно. Пусть

$$q_{01}(z) = \sum_{j \in Z} b_0(2j+1) z^{2j+1}, q_{02}(z) = \sum_{j \in Z} b_0(2j) z^{2j},$$
$$q_{11}(z) = \sum_{j \in Z} b_1(2j+1) z^{2j+1}, q_{12}(z) = \sum_{j \in Z} b_1(2j) z^{2j}, \ldots,$$
$$q_{m1}(z) = \sum_{j \in Z} b_m(2j+1) z^{2j+1}, q_{m2}(z) = \sum_{j \in Z} b_m(2j) z^{2j}.$$

Тогда решение однородного функционального уравнения

$$Q(z)\left(q_{01}(z), q_{02}(z), q_{11}(z), q_{12}(z), \ldots, q_{m1}(z), q_{m2}(z),\right)^T =$$
$$= 0, z \in R \setminus \{0\},, \ j \in Z,$$

где $Q(z) = \left\{ Q_{kj}(z) \right\}, k = \overline{0,m}, \ j = \overline{1, 2m+2}$ – матрица скалярных произведений (1) будет означать, что $\left\langle \psi^{(m)}, \phi_k^{(m)}(\cdot - j) \right\rangle = 0, k = \overline{0,m}.$

Если ранг полученной однородной системы равен m+1, то она имеет m+1 независимых решений. Эти m+1 независимых решений порождают m+1 материнских вейвлетов $\psi_\alpha, \alpha = \overline{0,m}$, удовлетворяющих условию (1).

По представленному выше алгоритму для каждого конкретного значения m можно построить эрмитовы сплайн-мультивейвлеты (2m+1)-й степени, полуортогональные относительно скалярного произведения $\left\langle u^{(m)}, v^{(m)} \right\rangle$. В частности, в работе [6] был рассмотрен случай m=1, и построенные мультивейвлеты имели суперкомпактный носитель [–1, 1]. При этом один из них симметричный, а другой антисимметричный.

Построенные мультивейвлеты (2m+1)-й степени можно применить для численного решения дифференциальных, интегральных, интегро-

дифференциальных уравнений, при решении которых методом Галеркина от пробной функции требуется существование непрерывной m-й производной [7].

Сплайн-мультивейвлеты седьмой степени

Пусть при m=3 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и ϕ_4 – базисные эрмитовы сплайны седьмой степени. Аналитическое представление эрмитовых мультивейвлетов седьмой степени имеет вид (рис. 1) [8]:

$\psi_1(t)=\phi_1(2t+1)+\phi_1(2t-1)-42\phi_3(2t+1)-42\phi_3(2t-1)$;

$\psi_2(t)=\phi_2(2t+1)+\phi_2(2t-1)-150\phi_4(2t+1)-150\phi_4(2t-1)$;

$\psi_3(t)=20\phi_1(2t+1)+20\phi_1(2t-1)+147\phi_2(2t+1)-147\phi_2(2t-1)-1680\phi_3(2t)$;

$\psi_4(t)=-\phi_1(2t+1)+\phi_1(2t-1)-7\phi_2(2t+1)-7\phi_2(2t-1)-1680\phi_4(2t)$.

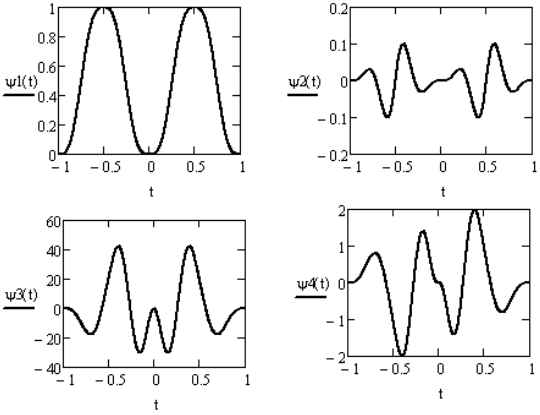

Рис. 1. Графики эрмитовых мультивейвлетов седьмой степени

Носителями построенных вейвлетов ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 является отрезок [–1,1], они удовлетворяют равенствам

$$\langle \psi'''_1, \phi'''_m(-j)\rangle=\langle \psi'''_2, \phi'''_m(-j)\rangle=\langle \psi'''_3, \phi'''_m(-j)\rangle=\langle \psi'''_4, \phi'''_m(-j)\rangle=0,$$
$$m=1,2,3,4.\ \forall j\in\mathbf{Z}, \qquad (2)$$

и их сдвиги генерируют пространство вейвлетов W так, что S_1 является прямой суммой S и W.Кроме того, ψ_1, ψ_3 антисимметричны, а ψ_2, ψ_4 симметричны.

Построим теперь вейвлет-базис в пространстве функций с суммируемой третьей производной $H_0^3(0,1)$.

Множество

$$\Phi_n:=\Phi^{1,n}\cup\Phi^{2,n}=\cup\Phi^{3,n}\cup\Phi^{4,n}, \qquad (3)$$

где $\Phi^{1,n}=\{\phi_1(2^n-j)\colon j=1,\ldots,2^n-1\}$, $\Phi^{2,n}=\{\phi_2(2^n-j)\big|_{(0,1)}\colon j=1,\ldots,2^n\}$,
$\Phi^{3,n}=\{\phi_3(2^n-j)\big|_{(0,1)}\colon j=0,\ldots,2^n\}$, $\Phi^{4,n}=\{\phi_4(2^n-j)\big|_{(0,1)}\colon j=0,\ldots,2^n\}$,
является базисом для V_n (V_n – пространство сплайнов седьмой степени, удовлетворяющих условиям: $n>0$, $v\in C[0,1]\cap C'[0,1]\cap C''[0,1]\cap C'''[0,1]$; $v(0)=v(1)=v'(0)=v'(1)=0$). Элементы Φ_n обозначим через $\{v_1,\ldots,\ v_{2^{n+2}+1}\}$.

Пусть Ψ_n – множество вейвлетов седьмой степени:

$$\Psi_n:=\{\psi_1(2^n-j)\big|_{(0,1)}\colon j=1,\ldots,2^n-1\}\cup\{\psi_2(2^n-j)\big|_{(0,1)}\colon j=1,\ldots,2^n-1\}\cup$$
$$\cup\{\psi_3(2^n-j)\big|_{(0,1)}\colon j=0,\ldots,2^n\}\cup\{\psi_4(2^n-j)\big|_{(0,1)}\colon j=0,\ldots,2^n\}, \qquad (4)$$

и W_n – линейное пространство, натянутое на Ψ_n, очевидно, что $\dim(W_n)=2^{n+2}$. Нетрудно доказать, что $\forall n\in\mathbf{N}$: $\langle v''',w'''_n\rangle=0$, $\langle w'''_m,w'''_n\rangle=0$, $m\neq n$. Из этого следует, что $V_n\cap W_n=\{0\}$. Отсюда

$$\left\| v'''+\sum_{n=1}^{\infty} w'''_n \right\|^2_{L_2(0,1)} = \|v'''\|^2_{L_2(0,1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\|w'''_n\|^2_{L_2(0,1)}\ . \qquad (5)$$

Ясно, что V_1 разлагается на $\phi_{1,j}$, $j=1,2,\ldots,8$. Следовательно, $H_0^3(0,1)$ разлагается на g_j, $j=1,\ldots,2^{n+2}+1$, где $g_j=\phi_{1,j}$, при $j=1,\ldots,8$ и $g_{2^{n+2}+1+j}=\psi_{n,j}$, $n\in\mathbf{N}$, $j=1,\ldots,2^{n+2}+1$: $H_0^3(0,1)=V_1\oplus W_1\oplus W_2\oplus\ldots$. Очевидно, что $\left(\psi'''_{n,j}\right)_{n\in N,1\le j\le 2^{n+2}+1}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$. Аналогично доказывается, что $(g'''_{k,j})_{k,j\in\mathbf{N}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Элементы Ψ_n обозначим через $\{w_{2^{n+2}+2},\ldots,w_{2^{n+3}+2}\}$, $n\in N$. Пусть $g_k:=v_k/\|v'''_k\|_2$ при $k=1,2,\ldots,8$, и $g_k:=w_k/\|w'''_k\|_2$ при $k>8$. Тогда $\|g'''_k\|_2=1$ при $n\in\mathbf{N}$.

Применение

В этом разделе мы используем построенные вейвлеты для решения дифференциальных уравнений вида

$$y'''+p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x) \qquad (6)$$

с граничными условиями

$$u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0, \qquad (7)$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ – заданные непрерывные функции. Пусть $a(u,v)$ обозначает билинейную форму, $u,v\in H_0^3(0,1)$:

$$a(u,v)=\int_0^1\left(u'''v'''+p_0u''v'''+p_1u'v'''+p_2uv'''\right)dx\ .$$

Тогда вариационная запись (6) – (7) имеет следующий вид:

$$a(u,v)=\langle f,v'''\rangle,\ \forall v\in H_0^3(0,1)\ .$$

Соответствующая задача аппроксимации Галеркина: найти $u_n \in V_n$, при котором

$$a(u_n,v)=<f,v'''> \quad \forall v \in V_n. \tag{8}$$

Задача (8) имеет единственное решение. Мы предлагаем использовать найденное выше множество вейвлетов $G=\{g_1,\ldots, g_{2^{n+2}+1}\}$ как базис для V_n. С этим базисом для V_n задача (8) может быть дискретизирована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+2}+1} a\left(g_j, g_k\right) c_k = \left\langle f, g_j \right\rangle, j=1,\ldots, 2^{n+2}+1.$$

Число обусловленности матрицы A_n равномерно ограничено:

$A_n=(a(g_j,g_k))_{1\le j,k\le 2^{n+2}+1}$.

Рассмотрим численный пример:

$y''' = 24t - 180t^2 + 360t^3 + 210t^4$, $y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0$.

Точное решение $u(t)=t^4(1-t)^3$. Последовательные ошибки приближенного решения равны:

$\|u(t)-u_4(t)\|_2=2{,}15\times10^{-8}$, $\|u(t)-u_8(t)\|_2=2{,}092\times10^{-14}$,

$\|u(t)-u_{16}(t)\|_2=1{,}291\times10^{-15}$.

Здесь $\left\|u(t)-u_n(t)\right\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(u(t)-u_n(t)\right)^2 dt}$ – норма разностей.

Литература

1. **Cohen A. Doubeshies, Vial P.** Wavelets on the interval and fast wavelet transforms // Appl. Comput. Harmonic Anal. – 1993. – Vol.1. – P. 54–81.
2. **Dahmen W., Jia R.Q., Kunoth A.** Biorthogonal multiwavelets on the interval: Cubic Hermite splines // Constr. Approx. – 2000. – Vol. 16. – P. 221–259.
3. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
4. **Yousefi S.A.** Numerical solution of Abel's integral equation by using Legendre wavelets // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol. 176. – P. 574–580.
5. **Yousefi S.A.** Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane–Emden type // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol.181. – P. 1417–1422.

6. **Jia R.-Q., Liu S.-T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. – 2006. – Vol. 25. – P. 23–39.
7. **Brenner S.C., Scott L.R.** The Mathematical Theory of Finite Element Methods. – New York: Springer, 1994.
8. **Турсунов Д.А., Шумилов Б.М.** Новый тип эрмитовых сплайн-вейвлетов седьмой степени // Материалы 14-го Всероссийского семинара «Моделирование неравномерных систем». – Красноярск, 2011. – С. 176–181.