Формосохраняющая интерполяция весовыми кубическими сплайнами

Б.И. Квасов
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Даются новые алгоритмы построения весовых кубических сплайнов, весьма эффективные при интерполяции быстро меняющихся данных. Приведены оценки ошибок интерполяции весовыми сплайнами. Алгоритмы автоматического выбора параметров формы сплайна позволяют сохранять монотонность и выпуклость исходных данных.

Задача формосохраняющей интерполяции

Пусть имеются данные: (x_i, f_i), $i = 0,...,N+1,$ (1)

где $a = x_0 < x_1 < ... < x_{N+1} = b.$ Положим

$$f[x_i, x_{i+1}] = (f_{i+1} - f_i)/h_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0,...,N.$$

Данные (1) будем называть монотонно возрастающими, если

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq 0, \quad i = 0,...,N,$$

и выпуклыми, если

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq f[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1,...,N.$$

Задача формосохраняющей интерполяции состоит в построении достаточно гладкой функции S такой, что $S(x_i) = f_i$, $i = 0,1,...,N+1,$ и S монотонна и выпукла на участках монотонности и выпуклости исходных данных.

Очевидно, что решение задачи формосохраняющей интерполяции неединственно. Будем искать его в виде весового кубического сплайна.

Определение 1. Интерполяционный кубический сплайн S со множеством весовых параметров $w_i > 0$, $i = 0,...N$ определяется как решение дифференциальной многоточечной краевой задачи (ДМКЗ)

$$\frac{d^4 S}{dx^4} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in (x_i, x_{i+1}),\ i = 0,...,N, \tag{2}$$

$$S \in C^1[a,b],$$

$$w_{i-1} S''(x_i^-) = w_i S''(x_i^+), \quad i = 1,...,N \tag{3}$$

с условиями интерполяции

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0,...,N+1. \tag{4}$$

Для однозначного определения сплайна требуется также задание краевых условий. Ограничимся использованием краевых условий двух типов:

1. Задание в граничных точках значений первой производной $S'(a) = f_0^{'}$ и $S'(b) = f_{N+1}^{'}$.
2. Задание в граничных точках значений второй производной: $S''(a) = f_0^{''}$ и $S''(b) = f_0^{''}$. (5)

Отметим, что значения производных должны быть согласованы с поведением данных. В противном случае можно получить несовместимость с условиями сохранения формы данных. Например, в случае краевых условий (5) можно использовать ограничения

$$f_0^{''} f[x_0, x_1, x_2] \geq 0, \qquad f_{N+1}^{''} f[x_{N-1}, x_N, x_{N+1}] \geq 0.$$

Определяющие соотношения для весовых кубических сплайнов

Рассмотрим алгоритм построения весовых сплайнов. Используем обозначения

$$M_i = w_{i-1} S''(x_i^-) = w_i S''(x_i^+), \quad i = 1, ..., N,$$
$$M_0 = w_0 S''(x_0^+), \qquad M_N = w_N S''(x_{N+1}^-).$$

Для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S''(x) = \frac{M_i}{w_i}(1-t) + \frac{M_{i+1}}{w_i} t, \text{ где } t = (x - x_i)/h_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i. \qquad (6)$$

Интегрируя (6) дважды и принимая во внимание краевые условия (4), получаем

$$S(x) = f_i(1-t) + f_{i+1} t - t(1-t)\frac{h_i^2}{6w_i}[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}]. \qquad (7)$$

Дифференцируя эту формулу, имеем

$$S'(x) = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{h_i}{6w_i}[(2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}]. \qquad (8)$$

Так как $S'(x_i^-) = S'(x_i^+), \ i = 1, ..., N,$ то находим

$$\frac{h_{i-1}}{w_{i-1}} M_{i-1} + 2\left(\frac{h_{i-1}}{w_{i-1}} + \frac{h_i}{w_i}\right) M_i + \frac{h_i}{w_i} M_{i+1} = 6\delta_i f, \quad i = 1, ..., N, \qquad (9)$$

где $\delta_i f = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$.

Используя формулы (6) и (8), краевые условия можно переписать в виде

1. $2M_0 + M_1 = \dfrac{6w_0}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0^{'}),$

$M_N + 2M_{N+1} = \dfrac{6w_N}{h_N}(f_{N+1}^{'} - f[x_N, x_{N+1}]).$

2. $M_0 = w_0 f_0^{''}, \quad M_{N+1} = w_N f_{N+1}^{''}.$

Система (9) с краевыми условиями типов 1 и 2 имеет диагональное преобладание. Это обеспечивает существование и единственность весового кубического сплайна. Решение системы (9) может быть найдено методом обычной трехточечной прогонки.

В ряде случаев более удобным оказывается другое представление весового кубического сплайна, основанное на значениях его первой производной.

Пусть $m_i = S'(x_i), \ i = 0,..., N+1.$ На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S(x) \equiv S_i(x) = f_i(1-t)^2(1+2t) + f_{i+1}t^2(3-2t) + + m_i h_i t(1-t)^2 - m_{i+1}h_i t^2(1-t),$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}]. \qquad (10)$$

Дважды дифференцируя формулу (10), получаем

$$S_i^{''}(x) = \frac{2}{h_i}(3(1-2t)f[x_i, x_{i+1}] - (2-3t)m_i - (1-3t)m_{i+1}).$$

Используя это выражение на соседних подотрезках $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, в силу условия (3) находим

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] + 3\mu_i f[x_i, x_{i+1}], \ i = 1,..., N, \qquad (11)$$

где

$$\lambda_i = \frac{w_{i-1}h_i}{w_{i-1}h_i + w_i h_{i-1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i. \qquad (12)$$

Для замыкания системы (11) используем опять краевые условия:

1. $m_0 = f_0^{'}, \quad m_{N+1} = f_{N+1}^{'}.$

2. $2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \dfrac{h_0}{2}f_0^{''}, \quad m_N + 2m_{N+1} = 3f[x_N, x_{N+1}] - \dfrac{h_N}{2}f_{N+1}^{''}.$

Оценки ошибок приближения

Рассмотрим случай, когда исходные данные (1) получены из некоторой гладкой функции f, т.е. $f_i = f(x_i), \ i = 0,..., N+1.$ Используя стандартную методику из [2], приходим к следующим оценкам.

Теорема 1. Пусть весовой кубический сплайн $S \in C^1[a,b]$ с краевыми условиями $S'(x_0) = f_0'$ и $S'(x_{N+1}) = f_{N+1}'$ интерполирует значения $f_i = f(x_i),\ i = 0,...,N+1$ некоторой функции $f \in C^2[a,b]$. Тогда имеют место следующие оценки ошибок приближения:

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_C \le C_r \overline{h}^{2-r} \| f'' \|_C,\ r = 0,1, \qquad (13)$$

где $C_0 = 13/48,\ C_1 = 0,86229$ и $\overline{h} = \max_i h_i$.

Отметим, что оценки (13) имеют место и для случая краевых условий типа 2, а также при «естественных» краевых условиях, когда $S''(a) = S''(b) = 0$.

Теорема 2. Пусть весовой кубический сплайн $S \in C^1[a,b]$ с краевыми условиями $S'(x_0) = f_0'$ и $S'(x_{N+1}) = f_{N+1}'$ интерполирует значения $f_i = f(x_i),\ i = 0,...,N+1$ некоторой функции $f \in C^4[a,b]$. Тогда имеют место следующие оценки ошибок приближения:

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_C \le C_r \overline{h}^{2-r} \| f'' \|_C + \tilde{C}_r \overline{h}^{4-r} \| f^{IV} \|_C,\ r = 0,1, \qquad (14)$$

где $C_0 = 1/8,\ C_1 = 1/2,\ \tilde{C}_0 = 5/384$ и $\tilde{C}_1 = 1/24$.

Порядки аппроксимации в оценках ошибок приближения (14) могут быть улучшены путем специального выбора весов w_i. Пусть $w_i = (1 + \Delta_i^2)^{-1},\ \Delta_i = f[x_i, x_{i+1}]$. Тогда порядки аппроксимации в оценках (14) повышаются до $O(\overline{h}^{3-r}),\ r = 0,1$.

Адаптивный выбор параметров контроля формы

Нас интересует такой выбор весов (параметров формы) интерполяционного кубического сплайна S, который позволяет сохранять форму исходных данных $(x_i, f_i),\ i = 0,...,N+1$. Например, если функция f монотонна или выпукла на некотором отрезке $[x_j, x_k]$, то мы хотели бы, чтобы сплайн S также имел эти свойства.

Предположим для определенности, что $f[x_i, x_{i+1}] \ge 0,\ i = 0,...,N$, т.е. данные монотонно возрастают. Уравнения (11) для наклонов весового кубического сплайна по форме не отличаются от соответствующих уравнений для C^2 кубического сплайна. Это позволяет переписать достаточные условия монотонности для C^2 кубического сплайна (см. [1, с. 156]) для случая весового кубического сплайна. В частности, имеет место следующий результат.

Теорема 3. Пусть весовой кубический сплайн $S \in C^1[a,b]$ с краевыми условиями $S'(x_0) = f_0^{'}$ и $S'(x_{N+1}) = f_{N+1}^{'}$ интерполирует монотонные данные $\{f_i\}$, $i = 0,...,N+1$. Если выполняются неравенства

$$0 \le f_0^{'} \le 3f[x_0, x_1], \quad 0 \le f_{N+1}^{'} \le 3f[x_N, x_{N+1}],$$
$$\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] \le (1+\lambda_i) f[x_i, x_{i+1}],$$
$$\mu_i f[x_i, x_{i+1}] \le (1+\mu_i) f[x_{i-1}, x_i],\ i = 1,...,N, \qquad (15)$$

то $S'(x) \ge 0$ для всех $x \in [a,b]$, т.е. сплайн S монотонен на $[a,b]$.

Принимая во внимание формулы (12), неравенства (15) можно переписать в виде

$$\frac{w_{i-1}}{w_i}\frac{h_i}{h_{i-1}} \ge \frac{f[x_i, x_{i+1}]}{f[x_{i-1}, x_i]} - 2,\ \frac{w_i}{w_{i-1}}\frac{h_{i-1}}{h_i} \ge \frac{f[x_{i-1}, x_i]}{f[x_i, x_{i+1}]} - 2,\ i = 1,...,N. \qquad (16)$$

Отсюда следует, что выбирая отношение w_{i-1}/w_i достаточно большим, можно существенно уменьшить ограничения на данные, достаточные для получения монотонности весового кубического сплайна. Для обычного кубического C^2 сплайна имеем $w_{i-1}/w_i = 1$.

Заметим, что для всякого i одно из неравенств (16) всегда выполняется. Пусть, например, имеет место неравенство $f[x_i, x_{i+1}] > f[x_{i-1}, x_i]$. Тогда второе неравенство в (16) выполнено. Первое неравенство может быть удовлетворено за счет выбора w_i непосредственно из неравенства. Можно предложить следующий алгоритм.

Пусть параметр w_{i-1} задан. Если неравенство (16) выполняется для $w_i = w_{i-1}$, то полагаем $w_i = w_{i-1}$. В противном случае находим w_i из того из неравенств (16), которое нарушается при $w_i = w_{i-1}$, заменяя в нем знак неравенства на знак равенства. Алгоритм начинаем с $w_0 = 1$ и легко находим все параметры $\{w_i\}$, обеспечивающие монотонность весового кубического сплайна для произвольных монотонных данных. Если на некотором шаге $w_i < \varepsilon$ ($w_i > 1/\varepsilon$), то полагаем $w_i = \varepsilon$ ($w_i = 1/\varepsilon$), где ε – достаточно малое положительное число, позволяющее предотвратить зануление (переполнение).

Данный алгоритм имеет ряд важных особенностей. На отрезках, где данные меняются незначительно, весовой сплайн будет иметь две непрерывные производные и наследует хорошие аппроксимативные свойства стандартного кубического сплайна. Вторая производная бу-

дет разрывна только в тех узлах сетки Δ, где требуется резкое изменение наклонов сплайна.

Заметим, что при задании «естественных» краевых условий, когда $S''(a) = S''(b) = 0,$ можно также воспользоваться неравенствами (16) как достаточными условиями монотонности (см. [1, с. 157]).

Рассмотрим теперь алгоритм выбора весовых параметров сплайна для сохранения выпуклости данных. Будем предполагать, что данные выпуклы, т.е. $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \geq 0, \quad i = 1, ..., N.$

Уравнения (9) вместе с краевыми условиями для второй производной могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} &M_0 = w_0 f_0'', \\ &\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_{i,} \quad i = 1, ..., N, \\ &M_{N+1} = w_N f_{N+1}'', \end{aligned} \tag{17}$$

где μ_i и λ_i определены в (12) и $d_i = \dfrac{6 w_{i-1} w_i}{w_i h_{i-1} + w_{i-1} h_i} \delta_i f.$ (18)

Уравнения (17) формально отличаются от соответствующих уравнений стандартного C^2 кубического сплайна только их правыми частями. Это позволяет записать достаточные условия выпуклости весового кубического сплайна (см. [1, с. 155]).

Теорема 4. Пусть весовой кубический сплайн $S \in C^1[a,b]$ с краевыми условиями $S''(x_0) = f_0''$ и $S''(x_{N+1}) = f_{N+1}''$ интерполирует выпуклые данные $\{f_i\}, \quad i = 0, ..., N+1.$ Если выполняются неравенства

$$f_0'' \geq 0, \quad f_{N+1}'' \geq 0, \quad 2d_i - \mu_i d_{i-1} - \lambda_i d_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, ..., N, \tag{19}$$

где $d_0 = w_0 f_0''$ и $d_{N+1} = w_N f_{N+1}''$, то $S''(x) \geq 0$ для всех $x \in [a,b],$ т.е. сплайн S является выпуклым на $[a,b]$.

Предположим, что $\delta_i f > 0, \quad i = 1, ..., N.$ Неравенства (19) можно усилить, расщепив их на две части. Имеем

$$2d_i - \mu_i d_{i-1} - \lambda_i d_{i+1} = \mu_i (2d_i - d_{i-1}) + \lambda_i (2d_i - d_{i+1}), \quad i = 1, ..., N.$$

Следовательно, неравенства (19) будут выполнены, если выполняются условия

$$0 \leq w_0 f_0'' \leq 2d_1, \; 0 \leq w_N f_{N+1}'' \leq 2d_N, \; d_{i-1}/2 \leq d_i \leq 2d_{i-1}, \; i = 2, ..., N. \tag{20}$$

Принимая во внимание формулу (18), нетрудно показать, что неравенства (20) будут выполнены, если будут удовлетворены следующие ограничения на краевые условия:

$0 < f_0'' < 12\delta_1 f / h_0, \quad 0 < f_{N+1}'' < 12\delta_N f / h_N$

и на весовые параметры:

$$\frac{w_0}{w_1}\frac{h_1}{h_0} \le \frac{12\delta_1 f}{h_0 f_0^{"}} - 1,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\delta_i f}{\delta_{i-1} f} - 1 \le \frac{w_{i-1}}{w_i}\frac{h_i}{h_{i-1}} \le 2\frac{\delta_i f}{\delta_{i-1} f} - 1, \quad i = 2, ..., N. \qquad (21)$$
$$\frac{w_N}{w_{N-1}}\frac{h_{N-1}}{h_N} \le \frac{12\delta_N f}{h_N f_{N+1}^{"}} - 1.$$

Используя эти неравенства, можно предложить алгоритм автоматического выбора параметров контроля формы, обеспечивающих сохранение выпуклости данных, который фактически является повторением описанного выше алгоритма для случая монотонных данных (исключение составляет случай отрицательных значений весовых параметров, которые мы заменяем на $\varepsilon > 0$). Легко видеть, однако, что если $\delta_{i-1} f \delta_i f < 0$, то неравенства (21) не могут быть удовлетворены ни для каких значений $w_i > 0$. Это означает, что следует рассматривать отдельно участки выпуклости и вогнутости данных.

Числовые примеры

Проиллюстрируем работу предложенных в статье алгоритмов монотонной и выпуклой интерполяции на популярных в литературе примерах. Для сравнения результатов использовалась также явная формула задания весов (параметров формы):

$$w_i = [1 + C_i (f[x_i, x_{i+1}])^2]^{-\alpha_i}, \quad C_i \ge 0, \quad \alpha_i \ge 0, \quad i = 0, ..., N.$$

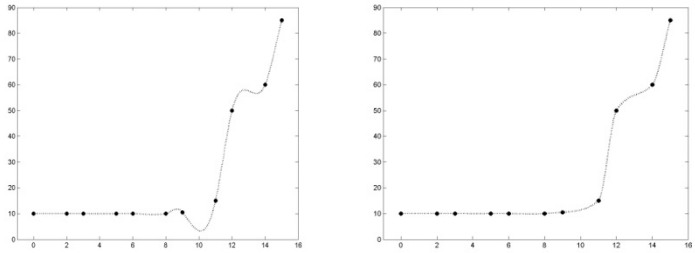
В качестве первого примера были взяты данные Акимы [1], приведенные в таблице, которые интерполировались весовым кубическим сплайном с «естественными» краевыми условиями $M_0 = M_{N+1} = 0$. На рис. 1, *а* показан график стандартного кубического сплайна класса C^2 ($w_i = 1$ для всех i). На рис. 1, *б* приведен график весового сплайна, когда веса выбирались по нашему алгоритму монотонной интерполяции.

x_i	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
f_i	10	10	10	10	10	10	10.5	15	50	60	85

В качестве второго примера была рассмотрена интерполяция функции $f(x) = 2 - \sqrt{x(2-x)},\ 0 \le x \le 2,$ которая дает полуокружность. Эта функция интерполировалась на сетке, равномерной по x (рис. 2, *а*) и

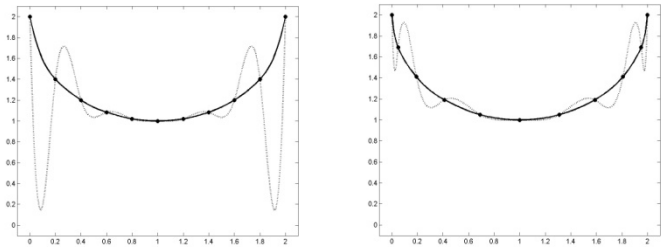
по длине хорд (рис. 2, *б*). В обоих случаях использовалось 11 точек интерполяции и краевые условия $S'(x_0) = -50,\ S'(x_{10}) = 50$ (C^2 кубический сплайн) и $m_0 = 2f[x_0, x_1],\ m_{10} = 2f[x_9, x_{10}]$ (весовой C^1 сплайн). Штриховой и сплошной линиями показаны графики интерполяционных кубического C^2 сплайна и весового кубического сплайна с весами, выбранными по нашему алгоритму. Переход к сетке с постоянным шагом по длине хорд позволяет уменьшить осцилляции C^2 сплайна, но не устраняет их. Весовой C^1 сплайн сохраняет свойство монотонности исходных данных.

Алгоритм автоматического выбора весовых параметров для сохранения выпуклости был протестирован также на этом примере. Он дает те же самые результаты, что и показанные на рис. 2. Использовались краевые условия $M_0 = 3w_0\delta_1 f / h_0$ и $M_{N+1} = 3w_N\delta_N f / h_N$.



а) б)

Рис. 1. Данные Акимы (см. таблицу) с краевыми условиями $M_0 = M_{N+1} = 0$: *а* – интерполяционный C^2 сплайн; *б* – весовой сплайн с параметрами формы по нашему алгоритму



а) б)

Рис. 2. Интерполяция полуокружности по данным на сетке: *а* – равномерной по x координате и *б* – равномерной по длине хорд. Штриховая и сплошная линии дают графики C^2 кубического ($w_i = 1$) и весового C^1 (наш алгоритм) сплайнов

Литература

1. **Квасов Б.И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – М.: Физматлит, 2006.
2. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980.