Примеры применения сплайнов, сохраняющих интеграл, при обработке изображения

О.П. Федорова
Томский государственный университет

Рассматриваются примеры применения сплайн-функций при работе с изображением.

Рассмотрим задачу сжатия и восстановления изображения. Изображение определим как функцию $f(x, y)$, где x, y – координаты на плоскости. Значение функции f в любой точке, задаваемой парой координат (x, y), называется интенсивностью или уровнем серого изображения в этой точке. Пусть изображение $f(x, y)$ задано в прямоугольной и ограниченной области D. Будем строить аппроксимацию на представлении кубического сплайна дефекта 1 по переменным x и y через базисные сплайны [1]

$$S(x,y)= \sum_{p=i-1}^{i+2} \sum_{q=j-1}^{j+2} z_{p,q}(f) B_p(x) B_q(y) \qquad (1)$$

на сетке, которая представляет собой множество точек пересечения двух семейств параллельных прямых, проведенных параллельно осям координат через точки $-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \infty$ и $-\infty < y_0 < y_1 < \ldots < y_m < \infty$. При этом прямоугольник $D = [x_0; x_n] \times [y_0; y_m]$ разбивается на прямоугольные ячейки $\Omega_{ij} = [x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$; $j = \overline{0, m-1}$. Здесь $B_i(x)$, $B_j(y)$ – базисные кубические сплайны [1]. При аппроксимации изображения $f(x, y)$ для вычисления коэффициентов $z_{ij}(f)$ построим формулу по аналогии с формулой, точной на кубических многочленах [1]. Получим для коэффициентов сплайна (1) на Ω_{ij} следующее выражение:

$$z_{pq} = \frac{16}{9} f_{p,q} - \frac{2}{9} f_{p-1,q} - \frac{2}{9} f_{p+1,q} -$$

$$- \frac{2}{9} f_{p,q-1} + \frac{1}{36} f_{p-1,q-1} + \frac{1}{36} f_{p+1,q-1} -$$

$$- \frac{2}{9} f_{p,q+1} + \frac{1}{36} f_{p-1,q+1} + \frac{1}{36} f_{p+1,q+1}.$$

Цифровое изображение состоит из конечного числа элементов, которые представляются в виде матрицы чисел. Координаты (x, y) – целые числа: номер строки и номер столбца матрицы. Элементы матрицы – значения яркости в градациях серого, принимают значения от 0 до 255. Если используется модель RGB представления цветов, то изображение – это совокупность из трех матриц. Рассмотрим пример черно-белого изображения (см. рис. 1, *в*), для которого n = 726 и m=473.

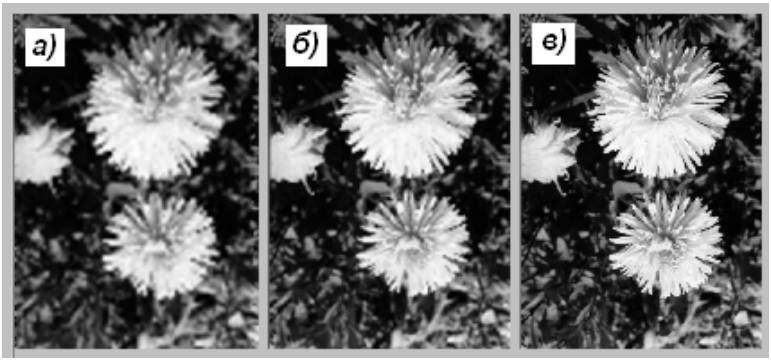


Рис. 1. Исходное изображение (*в*) и восстановленные (*а*) и (*б*)

На рис. 1, *а* и *б* показано изображение, восстановленное с помощью сплайна при шаге дискретизации $\Delta x = \Delta y = 6$ и $\Delta x = \Delta y = 4$, соответственно. Ошибка, определяемая как стандартное отклонение, составляет примерно 6% в случае *а* и 4% – в случае *б*.

Важное значение при работе с изображением имеет распределение уровня интенсивности, вычисляемое для заданного изображения. Для приближения распределений можно использовать сплайны, сохраняющие интеграл. Получаемые в этом случае функции можно рассматривать как некоторые распределения.

Пусть задана функция одной переменной $f(x), x \in D \subset R$ такая, что существует конечный интеграл от функции по области D:

$$\left| \int_D f(x)\,dx \right| < M \ .$$

Сплайн $S(x)$ на отрезке $[x_0; x_n]$ выражается линейной комбинацией нормализованных базисных B сплайнов

$$S(x) = \sum_i z_i(f) B_i(x). \qquad (2)$$

Выберем $z_i(f)$ так, чтобы значения определенного интеграла по области задания приближаемой функции и сплайна были равными [2. С. 62].

На промежутке $[x_i; x_{i+1}]$ кубический сплайн $S(x)$ дефекта 1 (2) запишется в виде

$$S(x) = \sum_{p=i-1}^{i+2} z_p B_p(x) .$$

Для нахождения коэффициентов z_i получена [2. С. 63] система линейных уравнений:

$$a_i z_{i-1} + b_i z_i + c_i z_{i+1} + d_i z_{i+2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \ , \ i = \overline{0, n-1} \ , \qquad (3)$$

здесь $a_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B_{i-1}(x)dx$, $b_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B_i(x)dx$, $c_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B_{i+1}(x)dx$,

$$d_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B_{i+2}(x)dx.$$

Система (3) дает n условий для определения n+3 коэффициентов. Дополнительные условия можно задать различным способом, исходя из знаний о свойствах приближаемой функции $f(x)$. В настоящей работе использованы условия равенства функции и сплайна в точках x_0, x_{n-1}, x_n. Получившаяся система разрешается методом прогонки

$$z_i = W_i z_{i+1} + Q_i z_{i+2} + R_i .$$

Исследования прогоночных коэффициентов W_i и Q_i показывают, что для i=6, 7, 8, … значения W_i отличается от –1,101020, а Q_i отличается от значения –0,101020 на величину, меньшую 10^{-6}. Этот факт может быть использован при практическом применении сплайна (2). При приближении распределения яркости вычисления нужно проводить в точках составляющих 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8 шага, поэтому для сокращения времени, затрачиваемого на вычисление значения сплайна, можно использовать таблицы значений базисных сплайнов в этих точках: $B_{i-1}(x_i+h/2) = B_{i+2}(x_i+h/2) = 1/48$, $B_i(x_i+h/2) = B_{i+1}(x_i+h/2) = 23/48$, $B_{i-1}(x_i+h/4) = B_{i+2}(x_i+3h/4) = 9/128$, $B_{i-1}(x_i+3h/4) = B_{i+2}(x_i+h/4) = 1/384$, $B_i(x_i+h/4) = B_{i+1}(x_i+3h/4) = 235/384$, $B_i(x_i+3h/4) = B_{i+1}(x_i+h/4) = 121/384$.

На рис. 2 штриховой линией показан полигон распределения яркости, построенный по 726*423 пикселям изображения (см. рис. 1, *в*). Кружками даны значения сплайна, построенного по 16 промежуткам.

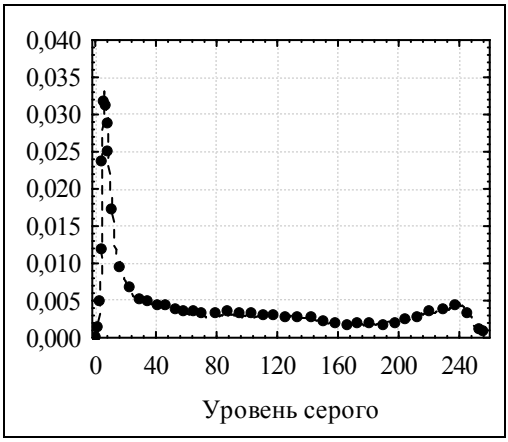


Рис. 2. Полигон распределения яркости черно-белого изображения

Ошибка, вычисляемая по среднему квадратичному отклонению, в данном примере около 5%. Таким образом, для восстановления исходного распределения с достаточной точностью можно сохранять 19 значений коэффициентов сплайна вместо 256 значений частот яркости отдельных пикселей.

Литература

1. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. **Федорова О.П.** Об одном подходе к приближению функций сплайнами. // Вестник Томского университета. Математика и механика. 2008. № 2(3). С. 61-66.