Расчет показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем при решении задач потока с отказами*

В.А. Павский, К.В. Павский
КемТИ, Кемерово
Институт физики полупроводников СО РАН, Новосибирск

Предлагается математическая модель для расчета показателей осуществимости решения задач потоков на распределенных вычислительных системах (ВС) в переходном режиме функционирования. В их основе лежат вероятностные процессы теории массового обслуживания. Полученные решения представлены в аналитическом виде.

На вычислительную систему (ВС) [1] поступает пуассоновский поток простых (последовательных) задач с интенсивностью α, из которых формируется пакет. Количество задач в пакете ограничивается числом n элементарных машин ВС, выделяемых для решения поступающих задач. Если пакет сформирован, то очередная задача получает отказ и считается потерянной. Как только ВС освобождается, она приступает к обслуживанию пакета (пусть даже и не до конца сформированного) и начинается формирование очередного пакета. Время решения каждой задачи в системе является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью решения β. По окончании решения всех задач ВС переходит к решению задач из очередного пакета. Требуется проанализировать эффективность работы системы.

Обозначим через $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \in [0,\infty)$ пакет состоит из k нерешенных задач, причем $P_0(0)=1$ (т.е. в начальный момент времени пакет был пустым); $k \in E_0^n = \{0,1,...,n\}$.

Используя методы ТМО [2,3], получаем систему дифференциальных уравнений

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №09-07-00185, №08-08-00300), Совета по грантам Президента РФ (грант №НШ-2121.2008.9).

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_0(t) = -\alpha \cdot P_0(t) + \beta \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(t), \\ \dfrac{d}{dt}P_k(t) = -(\alpha+\beta)\cdot P_k(t) + \alpha \cdot P_{k-1}(t), \quad k \in E_1^{n-1}, \\ \dfrac{d}{dt}P_n(t) = -\beta \cdot P_n(t) + \alpha \cdot P_{n-1}(t). \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1 \ , \ P_k(0) = 0. \tag{2}$$

Условие нормировки, являющееся следствием системы уравнений (1), имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1 \ , \ \forall t \in [0, \infty) \ . \tag{3}$$

Преобразуем первое уравнение системы (1) с учетом условия (3):

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -(\alpha+\beta)\cdot P_0(t) + \beta \ . \tag{4}$$

Общее решение системы (1) при начальных условиях (2) записывается в виде

$$P_0(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \ . \tag{5}$$

$$P_k(t) = \frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^{k+1}} - \frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^{k+1}} \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} +$$

$$+ e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \left(\frac{\alpha^{k+1} \cdot t^k}{k! \cdot (\alpha+\beta)} - \alpha^k \cdot \beta \cdot \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^r}{r! \cdot (\alpha+\beta)^{k-r+1}} \right) . \tag{6}$$

$$P_n(t) = \frac{\alpha^n}{(\alpha+\beta)^n} + \frac{\alpha^{n-1}\cdot\beta}{(\alpha+\beta)^n} \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} - \frac{\alpha^n}{(n-1)!(\alpha+\beta)} \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \times$$

$$\times \left(t^{n-1} + (n-1)! \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{\alpha^k \cdot (n-k-1)!} \right) + \alpha^{n-1} \cdot \beta \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \frac{t^r}{r! \cdot (\alpha+\beta)^{n-r}} +$$

$$+ \alpha^{n-1} \cdot \beta \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{r} \frac{t^{r-k}}{\alpha^k \cdot (\alpha+\beta)^{n-r} \cdot (r-k)!} \ . \tag{7}$$

Иллюстрация к характеру изменения значений вероятностей $P_k(t)$ от времени t представлена на рис. 1.

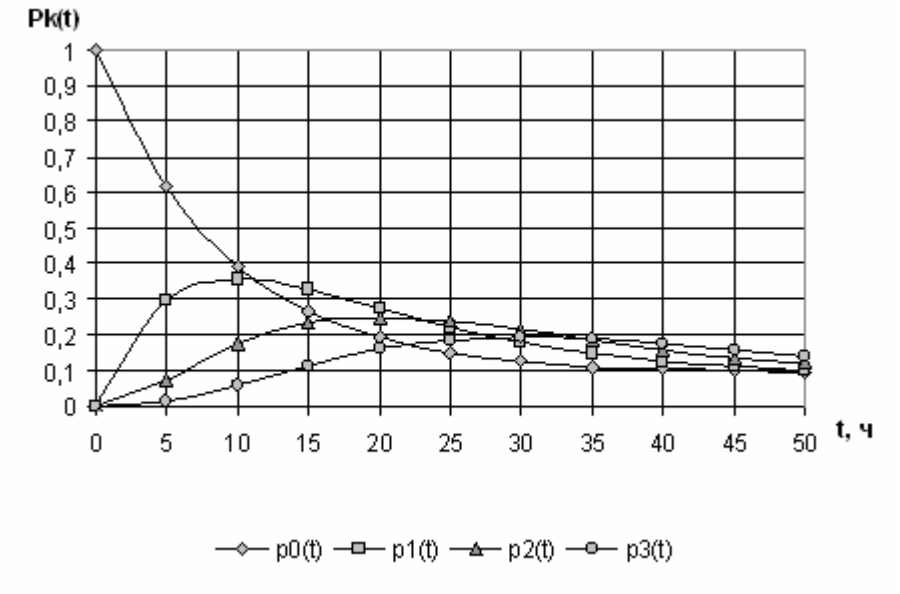


Рис. 1. Зависимость вероятностей $P_k(t)$, $k = 0,1,2,3$ от времени t при $\alpha = 0,1$ 1/ч, $\beta = 0,01$ 1/ч

Из рис. 1 видно, что стационарный режим функционирования ВС при решении задач наступает через достаточно длительный промежуток времени, $t > 45$ ч. Следовательно, для вычислительных систем, функционирующих в реальных условиях, пренебрежение зависимостью показателей эффективности от времени не допустимо.

Так как система M/M/1/n всегда эргодична, то стационарный режим ($\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} P_k'(t) = 0$) всегда существует и

$$P_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ ,\ P_k = \frac{\alpha^k \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^{k+1}}\ ,\ k \in E_1^{n-1}\ ,\ P_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha+\beta)^n}\ . \quad (8)$$

Как следует из (3), вероятности $P_k(t), k \in E_0^n$ составляют ряд распределения и, следовательно, представляют базис, через который выражаются показатели, характеризующие эффективность процесса решения (осуществимость решения [1. С.477], [4. С.32]) задач на ВС в момент времени t , $t \in [0,\infty)$. Рассмотрим те из них, которые можно использовать при экспресс-анализе функционирования ВС:

1) вероятность того, что пакет не пуст:

$$P_{\geq 1} = 1 - P_0 \ ;$$

2) вероятность отказа в обслуживании задачи

$$P_{OTK} = P_n \ ;$$

3) средний объем пакета

$$n = \left[\frac{\ln P_{OTK}}{\ln \alpha - \ln(\alpha + \beta)} \right], \qquad (9)$$

где $[x]$ – целая часть числа x ;

4) среднее число задач в пакете

$$M = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{\alpha^{k-1}}{(\alpha + \beta)^{k-1}} + n \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n \ ; \qquad (10)$$

5) дисперсия числа задач в пакете

$$D = \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{k-1} + n^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n - M^2 \ . \qquad (11)$$

Литература

1. **Хорошевский В.Г.** Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 520 с.
2. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
3. **Вишневский В.М.** Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
4. **Павский В.А., Павский К.В., Хорошевский В.Г.** Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. 2006. №4. С. 28-34.