Исследование неоднородной структуры биологического объекта при пропускании электрического тока небольшой силы

Е.С. Шерина
Томский государственный университет

Для исследования неоднородной структуры биологических объектов используется томография. В работе рассматриваются прямая и обратная задачи электроимпедансной томографии, которые позволяют воспроизводить распределение импеданса внутри биологического объекта. Решение осуществляется численно с использованием метода конечных объемов.

Область применения томографии охватывает медицинскую диагностику, геофизику, промышленную интроскопию и т.д. В медицине томографические обследования позволяют получить данные об анатомической структуре и функционировании органов и систем организма, помогают выявлять аномалии в участках органов и тканях. Электроимпедансная томография (ЭИТ) позволяет воспроизводить внутреннюю структуру биологических объектов. Исследования ЭИТ осуществляются с использованием электрического тока.

Прямая задача ЭИТ заключается в нахождении распределения потенциала электрического поля внутри биологического объекта при заданном распределении проводимости и конфигурации поверхностных источников тока. Обратная задача ЭИТ – в нахождении распределения электрического сопротивления (импеданса) внутри биологического объекта.

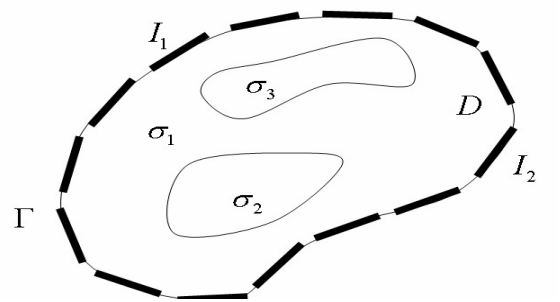


Рис. 1. Область исследования

Рассматривается биологический объект (рис. 1), через который пропускается электрический ток небольшой силы частотой не более 100–150 кГц через расположенные локально на поверхности электроды. Объект находится в воздушной среде, имеет достаточно гладкую границу Г и характеризуется значениями коэффициента электрической проводимости σ, который зависит от координат (x,y). I_1 и I_2 – прикрепленные на поверхности объекта электроды с площадью поверхности S_1 и S_2 соответственно.

Математическая постановка задачи получается с использованием уравнения Максвелла в проводниках, закона Ома для неподвижных проводников, закона Кирхгоффа и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)=0,\quad (x,y)\in D, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\vec{n}}\right|_{\Gamma_0}=0, \tag{2}$$

$$I_{1,2}=\pm J_n S=\pm\sigma(x,y)S\left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\vec{n}}\right|_{\Gamma_{1,2}}. \tag{3}$$

Причем должен выполняться закон сохранения $I_1+I_2=0$. $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали; J_n – плотность тока на границе.

Дискретные аналоги дифференциального уравнения и граничных условий получаются методом конечного объема на неструктурированной треугольной сетке, которая строится в исследуемой области.

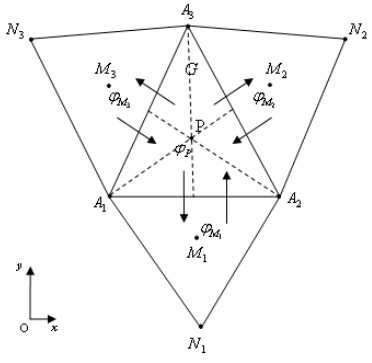


Рис. 2. Фрагмент сетки

Рассматривается фрагмент сетки (рис. 2), на котором изображены четыре конечных объема. $G=\Delta A_1A_2A_3$, направление обхода – против часовой стрелки. Уравнение (1) интегрируется по конечному объему G, окружающему узел P:

$$\iint_G\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right)dG=0$$

По теореме Гаусса–Остроградского в двумерном случае получается следующее уравнение:

$$\iint_G\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right)dG=$$

$$= \oint\limits_{\partial G} (\vec{n}, \sigma grad\varphi) dl = \oint\limits_{\partial G} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = 0,$$

где n – единичный вектор внешней нормали к границе треугольной ячейки. Иначе уравнение запишется в виде

$$\int\limits_{A_1A_2} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{12}} dl + \int\limits_{A_2A_3} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{23}} dl + \int\limits_{A_3A_1} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{31}} dl = 0.$$

В результате для получения разностного уравнения необходимо аппроксимировать интегралы по ребрам, используется формула средних прямоугольников:

$$\int\limits_{A_1A_2} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{12}} dl + \int\limits_{A_2A_3} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{23}} dl + \int\limits_{A_3A_1} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{31}} dl \approx$$

$$\approx \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{12}} \right)_{m_{12}} \Delta l_{12} + \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{23}} \right)_{m_{23}} \Delta l_{23} + \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{31}} \right)_{m_{31}} \Delta l_{31} = 0,$$

где $\left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_{ij}} \right)_{m_{ij}}$ – производная по направлению внешней нормали к конечному объему G на ребре A_iA_j, вычисленная в середине ребра; Δl_{ij} – длина ребра A_iA_j, m_{ij} – середина ребра.

Аппроксимация производных в последнем выражении производится в промежуточных точках C_p и C_{Mk}, отложенных по нормали n_{ij} к ребру A_iA_j на расстоянии Δn_{ij} и Δn_{ijk} соответственно от A_iA_j. С помощью разложения функции φ по формуле Тейлора в точках C_p и C_{Mk} получается разностный аналог производной

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_{ij}} \right)_{m_{ij}} = \frac{\varphi(C_{M_k}) - \varphi(C_P)}{\Delta n_{ij} + \Delta n_{ijk}} + O(\Delta n).$$

Предполагается, $\Delta n_{ij} = \Delta n_{ijk}$, $\varphi(C_P) \approx \varphi(P)$, $\varphi(C_{M_k}) \approx \varphi(M_k)$. Кроме того, $\Delta n_{ij} = \frac{2S_{ij}}{\Delta l_{ij}}$.

В итоге получается разностный аналог уравнения (1):

$$\sigma \frac{\varphi(M_1) - \varphi(P)}{4S_{12}} (\Delta l_{12})^2 + \sigma \frac{\varphi(M_2) - \varphi(P)}{4S_{23}} (\Delta l_{23})^2 + \sigma \frac{\varphi(M_3) - \varphi(P)}{4S_{31}} (\Delta l_{31})^2 = 0. \quad (4)$$

Для аппроксимации граничных условий в рассматриваемой области D (см. рис. 1) к граничным ячейкам достраиваются симметричные ячейки так, чтобы прямая, соединяющая центры масс данных контрольных объемов, была параллельна вектору нормали. Для граничного условия (2), выражающего контакт тела с воздухом, получаем следующий разностный аналог:

$$\varphi(M_k) - \varphi(P) = 0. \quad (5)$$

А условие (3) контакта тела с электродом аппроксимируется в виде

$$\sigma \frac{\varphi(M_k) - \varphi(P)}{2\Delta n_{ij}} \Delta l_{ij} = I. \qquad (6)$$

Разностная задача (4)–(6) имеет первый порядок аппроксимации, устойчива и её решение сходится к точному решению с первым порядком точности.

Полученная разностная задача решается методом бисопряженных градиентов Bi-CGSTAB без предобуславливания.

В работе рассматривается тестовая задача для уравнения Лапласа в круге единичного радиуса, на которой показана сходимость численного решения к точному решению с первым порядком точности. Также проведен численный эксперимент для модели биологического объекта. Найдено распределение потенциала электрического поля с помощью пакета Fluent при коэффициенте электрической проводимости σ=0,5 и силе тока $I_{1,2}$=±2,5. Выполнено численное решение задачи с теми же условиями.

Обратная задача – тип задач, часто возникающий во многих разделах науки, когда значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных. Обратная задача ЭИТ является коэффициентной обратной задачей. Реконструкция неизвестного распределения проводимости внутри исследуемого объекта производится на основе данных измерения разности потенциалов между точками его поверхности. Составляется функционал вида

$$\delta\sigma = D^{-1}(\varphi^* - \varphi),$$

где D^{-1} – оператор преобразования отклонения вычисленного значения потенциала φ от измеренного φ^* в вариацию проводимости σ. Данные для решения обратной задачи получаются при решении множества прямых задач с различными конфигурациями электрического тока и при всевозможных парах электродов.

ЭИТ – новый и не слишком известный томографический метод исследования. У современного электроимпедансного томографа существует проблема точности получаемого изображения, соответствия его действительности. Не удается обнаружить образования (например, опухоли), размер которых меньше 1% от размера области (томосреза). Решение такой проблемы требует рассмотрения новых методов решения задачи и использования более мощной вычислительной техники.

Литература

1. **Пеккер Я.С., Бразовский К.С.** Электроимпедансная томография. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 192 с.

2. **Фирсов Д. К.** Метод контрольного объема на неструктурированной сетке в вычислительной механике : Учеб. пособие. Томск, 2007. 46 с.