Приближенное решение дифференциальных уравнений четвертого порядка с помощью эрмитовых сплайн-вейвлетов пятой степени*

Д.А. Турсунов, Э.А. Эшаров, А.Т. Бекмуратов
Ошский государственный университет, Киргизия
Томский государственный архитектурно-строительный университет

Используется новый тип эрмитовых сплайн-вейвлетов пятой степени для построения приближенного решения задачи Дирихле для дифференциальных уравнений четвертого порядка. Вейвлеты построены в базисе эрмитовых сплайнов пятой степени. Построенные вейвлеты принадлежат пространству C2, носителем материнских вейвлетов является отрезок [–1, 1].

Введение

В данной статье построены базисные вейвлеты в пространстве эрмитовых сплайнов пятой степени на отрезке [0, 1]. Построенные базисные вейвлеты применяются для численного решения задачи Дирихле для дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Введем обозначения: **R**, **Z**, **N** – множество действительных, целых и натуральных чисел соответственно; $L_2(\mathbf{R})$ – линейное пространство квадратично-интегрируемых вещественных функции на **R**; $\langle u,v\rangle := \int_{\mathrm{R}} u(x)v(x)dx,\ u(x),v(x)\in L_2(\mathrm{R})$ – скалярное произведение; если $\langle u,v\rangle=0$, то функции *u, v* называются ортогональными; $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ – норма функции *f* в $L_2(\mathbf{R})$; $L_2(0, 1)$ – линейное пространство квадратично-интегрируемых вещественных функций на интервале (0, 1). Скалярное произведение в $L_2(0,1)$ имеет вид $\langle u,v\rangle := \int_0^1 u(x)v(x)dx,\ u(x),v(x)\in L_2(0,1)$; $H^1(0,1)$ – пространство функций $u(x)\in C(0,1)$ таких, что $u''(x)\in L_2(0,1)$; $H_0^1(0,1)$ – замыкание множества $\{u\in C[0,1]\cap C'[0,1]\cap C''[0,1]$: $u(0)=u(1)=0$, $u'(0)=u'(1)=0\}$ в $H^1(0, 1)$; Π_k – множество многочленов степени *k*, (*k* = 0, 1,

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №09-07-90901, №09-01-90716.

2, …); V_n – пространство сплайнов пятой степени, удовлетворяющих следующим условиям, $n>0$:

а) $v \in C[0,1] \cap C'[0,1] \cap C''[0,1]$; б) $v(0)=v(1)=v'(0)=v'(1)=0$;

в) $v\big|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)} \in \Pi_5\big|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)}$, $j=0,\ldots,2^n-1$; $\dim(V_n)=3*2^n-1$.

Добеши [1] построила полуортогональные вейвлеты неполиномиального типа с компактным носителем. Коэн и др. [2] адаптировали ортогональные вейвлеты Добеши на отрезок [0,1]. Чуи и Вонг [3] построили полуортогональные сплайн-вейвлеты. В [4] эти сплайн-вейвлеты были адаптированы к отрезку [0,1]. Вонг [5] построил базис кубических сплайн-вейвлетов в пространстве Соболева. Донован и др. [6] построили ортогональные мультивейвлеты.

Недостатками построенных ранее вейвлетов является то, что они либо не имеют аналитического представления, либо расположены на достаточно широком носителе. И то и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения интегродифференциальных уравнений.

В [7] было доказано, что полуортогональные кубические мультивейвлеты на суперкомпактном носителе можно построить относительно скалярного произведения $\langle u', v' \rangle$.

Ранее нами построено приближенное решение задачи Дирихле для дифференциальных и интегродифференциальных уравнений второго порядка с помощью эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов. В данной статье, используя эту же идею, с помощью нового типа эрмитовых сплайн-вейвлетов пятой степени построено приближенное решение задачи Дирихле для дифференциального уравнения четвертого порядка.

Пусть ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 – базисные эрмитовы сплайны пятой степени:

$$\phi_1(t)=\begin{cases}(t+1)^3\left(1-3t+6t^2\right) & \text{при} \quad -1\le t\le 0,\\ (1-t)^3\left(1+3t+6t^2\right) & \text{при} \quad 0\le t\le 1,\end{cases}$$

$$\phi_2(t)=\begin{cases}(t+1)^3\left(t-3t^2\right) & \text{при} \quad -1\le t\le 0,\\ (1-t)^3\left(t+3t^2\right) & \text{при} \quad 0\le t\le 1,\end{cases}$$

$$\phi_3(t)=\begin{cases}(t+1)^3\dfrac{t^2}{2} & \text{при} \quad -1\le t\le 0,\\ (1-t)^3\dfrac{t^2}{2} & \text{при} \quad 0\le t\le 1.\end{cases}$$

Нетрудно заметить, что множество

$$\Phi_n:=\{\phi_1(2^n-j): j=1,\ldots,2^n-1\}\cup\{\phi_2(2^n-j): j=1,\ldots,2^n-1\}\cup\{\phi_3(2^n-j): j=0,\ldots,2^n\} \quad (1)$$

является базисом для V_n. Элементы Φ_n обозначим через $\{v_1,\ldots, v_{3*2^{n}-1}\}$.

Пусть Ψ_n – множество вейвлетов, но пока не конкретизируются: $\Psi_n:=\{\psi_1(2^n-j): j=1,\ldots,2^n-1\}\cup\{\psi_2(2^n-j): j=1,\ldots,2^n-1\}\cup\{\psi_3(2^n-j): j=0,\ldots,2^n\}$, (2) и W_n – линейное пространство, натянутое на Ψ_n, очевидно, что $\dim(W_n)=3*2^n-1$. Ниже мы докажем следующее равенство:

$$\int_0^1 w''(x)v''(x)dx = 0,\ \forall w\in\Psi_n,\ \forall v\in\Phi_n\ . \tag{3}$$

Из этого следует, что $V_n\cap W_n=\{0\}$. Кроме того, будет показано, что $V_{n+1}\supseteq V_n+W_n$ и $\dim(V_{n+1})=\dim(V_n)+\dim(W_n)$. Это означает, что $V_{n+1}=V_n\oplus W_n$.

Следовательно, мы получим разложение

$$H_0^1(0,1): H_0^1(0,1) = V_1\oplus W_1\oplus W_2\oplus\ldots. \tag{4}$$

Напомним, что $\Phi_1=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$; элементы Ψ_n обозначим $\Psi_n=\{w_{3*2^n},\ldots\}$.

Пусть $g_k:=v_k/\|v''_k\|_2$ при $k=1,2,3,4,5$ и $g_k:=w_k/\|w''_k\|_2$ при $k>5$. Тогда $\|g''_k\|_2=1$ при $n\in\mathbf{N}$. $(g''_k)_{k\in\mathbf{N}}$ является последовательностью Рисса в $L_2(0, 1)$.

Сплайн-вейвлеты

В данном разделе мы построим базисные вейвлеты на пространстве эрмитовых сплайнов пятой степени.

Пусть ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 – сплайны пятой степени, определенные во введении. Очевидно, что они удовлетворяют условиям: $\phi_1, \phi_2, \phi_3\in C^2$, $\phi_1(0)=1$ $\phi'_1(0)=0$, $\phi''_1(0)=0$, $\phi_2(0)=0$ $\phi'_2(0)=1$, $\phi''_2(0)=0$, $\phi_3(0)=0$ $\phi'_3(0)=0$, $\phi''_3(0)=1$.

Следовательно, эрмитовы интерполяция для функции $f\in C^2(\mathbf{R})$ имеет следующий вид:

$$u=\sum_{j\in Z} f(j)\phi_1(\cdot-j)+f'(j)\phi_2(\cdot-j)+f''(j)\phi_3(\cdot-j), \tag{5}$$

$$\forall j\in Z:\ u(j)=f(j),\ u'(j)=f'(j),\ u''(j)=f''(j). \tag{6}$$

Используем построенные нами сплайн-вейвлеты:

$$\psi_1(x)=\phi_1(2x+1)-\phi_1(2x-1)-60\phi_3(2x+1)-60\phi_3(2x-1),$$

$$\psi_2(x)=2\phi_1(2x+1)-2\phi_1(2x-1)+13\phi_2(2x+1)+13\phi_2(2x-1)+16\phi_2(2x)-24\phi_3(2x+1)+$$
$$+24\phi_3(2x-1),$$

$$\psi_3(x)=\phi_1(2x+1)+\phi_1(2x-1)-\phi_2(2x+1)+\phi_2(2x-1)-68\phi_3(2x+1)-68\phi_3(2x-1)+16\phi_3(2x).$$

Применение

В этом разделе мы используем построенные вейвлеты для решения дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^4u}{dx^4}+p(x)u=f(x),\quad 0<x<1 \tag{7}$$

с граничным условием $u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0,$ (8)
где $p_k(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции. Коэффициенты уравнения (7) удовлетворяют условиям

$$0\le p_k(x)\le c_k,\ k = 0, 1, 2, 3,\ x\in[0, 1]. \quad (9)$$

Пусть $a(u,v)$ обозначает билинейную форму, $u, v \in H_0^1(0,1)$:

$$a(u,v) = \int_0^1 u''(x)v''(x)dx + \int_0^1 p(x)u(x)v(x)dx.$$

Тогда вариационная запись (7)-(8) имеет следующий вид:

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Соответствующая задача аппроксимации Галеркина: найти $u_n\in V_n$, при котором

$$a(u_n,v)=\langle f,v\rangle\ \forall v\in V_n. \quad (10)$$

По лемме Лакса–Милграмма (см. [8. С. 60]) задача (10) имеет единственное решение. Мы предлагаем использовать найденное выше множество вейвлетов $G=\{g_1,\ldots,g_2^{n+1}\}$ как базис для V_n. С этим базисом для V_n задача (10) может быть дискретизирована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a(g_j, g_k)c_k = \langle g_j, f\rangle, \qquad j = 1,\ldots,2^{n+1}.$$

Обозначим матрицу $A_n=(a(g_j,g_k))_{1\le j,k\le 2^{n+1}}$. Можно доказать, что число обусловленности матрицы A_n равномерно ограничено (не зависит от n).

Вывод

Численные результаты показывают, что точность улучшается с повышением n.

Литература

1. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. Москва; Ижевск: РХД, 2001.
2. **Cohen A., Doubechies I., Vial P.** Wavelets on the interval and fast wavelet transforms // Appl. Comput. Harmonic Anal. 1993. Vol. 1. P. 54-81.
3. **Chui C.K., Wang J.Z.** On compactly supported wavelets and a duality principle // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 330. P. 903-916.
4. **Chui C.K., Quak E.** Wavelets on a bounded interval // Numerical Methods in Approximation Theory eds. D. Braess and L.L. Schumaker. Birkhauser, Brasel, 1992. Vol. 9. P. 53-75.

5. **Wang J.Z.** Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation // Appl. Comput. Harmonic Anal. 1996. Vol. 3. P.154-163.
6. **Donovan G., Geronimo J.S., Hardin D.P., Massopust P.R.** Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions SIAM // J. Math. Anal. 1996. Vol. 27. P. 1158-1192.
7. **Jia R.-Q., Liu S.-T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. 2006. Vol. 25. P. 23-39.
8. **Brenner S.C., Scott L.R.** The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York: Springer. 1994.