Обоснование корректности полинейного рекуррентного метода решения разностных эллиптических уравнений

А.А. Фомин, Л.Н. Фомина
Кемеровский государственный университет

Рассматривается матрично-векторная форма записи алгоритма итерационного полинейного рекуррентного метода решения пятидиагональных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами положительного типа. Путем пошаговых устойчивых преобразований выводятся общий вид и структура результирующего оператора. Приводится обоснование корректности метода.

Как известно, решение краевых задач тепло- и массопереноса связано с разностной дискретизацией их исходных дифференциальных постановок, что, в свою очередь, приводит к возникновению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $A\vec{\Phi} = \vec{f}$. Здесь A – матрица системы; $\vec{\Phi}$ – искомый вектор решения; $\vec{f}$ – вектор правой части системы. Подобные матрицы обладают высоким порядком и ленточной структурой [1]. Для многомерных задач полученные таким образом СЛАУ разрешаются, как правило, итерационными методами.

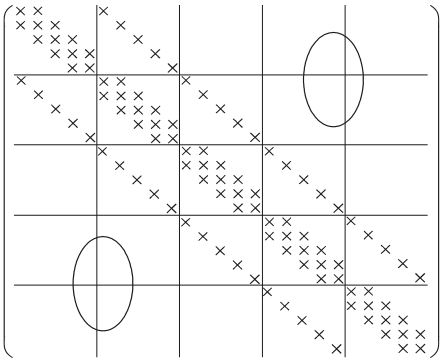


Рис. 1. Структура матрицы A

В работах [2, 3] излагается алгоритм и рассматриваются результаты тестовых расчетов итерационного полинейного рекуррентного метода для случаев, когда A – матрица положительного типа. Данный метод

демонстрирует свою высокую эффективность, однако в силу того, что в общем случае записать его явно в канонической форме $P_{k+1}(\vec{\Phi}^{k+1}-\vec{\Phi}^{k})=\vec{f}-A\vec{\Phi}^{k}$ [1] не представляется возможным, корректность каждого расчета необходимо фактически доказывать вычислением нормы невязки для очередного приближения решения. Само по себе выполнить такое вычисление не сложно, более того, именно по величине нормы невязки и определяется сходимость вектора решения. Однако в целях теоретической завершенности изложения этого метода представляется необходимым в общем случае обосновать его корректность, т.е. показать, что в случае выполнения условия $\left\|\vec{\Phi}^{k+1}-\vec{\Phi}^{k}\right\|_{k\to\infty}\to 0$ полученное решение удовлетворяет исходной системе линейных алгебраических уравнений.

Для двумерных задач матрица *A* имеет пятидиагональную структуру (рис. 1). Общее число неизвестных и, следовательно, размер матрицы *A* равны числу $N=n\times m$. Как известно, такая матрица может быть разбита на отдельные квадратные клетки, количество которых, для определенности, будет $n\times n$, тогда размер каждой клетки – $m\times m$. Здесь и далее для наглядности и не в ущерб общности изложения материала выбрана разностная сетка 5×5. Понятно, что в рамках рассматриваемого случая только клетки на диагонали и околодиагональные будут отличны от нуля, все остальные – нулевые. Поклеточная структура матрицы *A* и состав двух клеток (для примера) имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45}\\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix},\quad A_{11}=\begin{pmatrix} a_{P_{11}}-a_{N_{11}} & 0 & 0 & 0\\ -a_{S_{12}} & a_{P_{12}}-a_{N_{12}} & 0 & 0\\ 0 & -a_{S_{13}} & a_{P_{13}}-a_{N_{13}} & 0\\ 0 & 0 & -a_{S_{14}} & a_{P_{14}}-a_{N_{14}}\\ 0 & 0 & 0 & -a_{S_{15}} & a_{P_{15}} \end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix} -a_{E_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -a_{E_{12}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_{E_{13}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -a_{E_{14}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{E_{15}} \end{pmatrix}$$

Первые два шага полинейного рекуррентного метода представляют собой воздействие на исходную систему двумя невырожденными операторами: $M^{(12)}_{(+)}M^{(11)}_{(+)}(A\vec{\Phi}-\vec{f})=0$. При этом только диагональные клетки матриц операторов $M^{(11)}_{(+)}$ и $M^{(12)}_{(+)}$ отличны от нуля, из них первые клетки в верхнем ряду имеют следующий вид:

$$M_{11(+)}^{(11)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_{S_{12}}/a_{P_{11}} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad M_{11(+)}^{(12)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

остальные диагональные клетки – единичные матрицы. Следовательно, клетки произведения имеют следующую структуру:

$$\left(M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A\right)_{11}=\begin{pmatrix}\times\times 0 0 0\\ 0\times\times 0 0\\ 0 0\times\times 0\\ 0 0\times\times\times\\ 0 0 0\times\times\end{pmatrix},\quad \left(M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A\right)_{12}=\begin{pmatrix}\times 0 0 0 0\\ \times\times 0 0 0\\ \times\times\times 0 0\\ 0 0 0\times 0\\ 0 0 0 0\times\end{pmatrix}.$$

Пусть $M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A=G_{(+)}^{(12)}+L_{(+)}^{(12)}$, причем матрица $L_{(+)}^{(12)}$ состоит из нулей, кроме второй клетки в верхнем ряду, которая имеет всего лишь один ненулевой элемент – коэффициент «внешаблонного» узла [3]:

$L_{12(+)}^{(12)}=\begin{pmatrix}0 0 0 0 0\\ 0 0 0 0 0\\ \times 0 0 0 0\\ 0 0 0 0 0\\ 0 0 0 0 0\end{pmatrix}$, а матрица $G_{(+)}^{(12)}$ содержит все остальные элементы матрицы $M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A$. Используя данное представление, исходная система перепишется в виде $G_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}+L_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}=\left[\prod_{j=2}^{1}M_{(+)}^{(1j)}\right]\vec{f}$.

При помощи одного из способов аппроксимации значения искомой функции во «внешаблонном» узле производится замена члена, содержавшего его: $L_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}\to L_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}^{(k)}+\theta B_{(+)}^{(12)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}$, - при этом алгоритм принимает итерационный характер. После проведения подобных преобразований на первой расчетной линии (верхний ряд клеток) исходное уравнение можно переписать в виде

$$\mathcal{G}^{(2)}\vec{\Phi}^{(k+1)}+\theta\mathcal{B}^{(2)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}+\mathcal{L}^{(2)}\vec{\Phi}^{(k)}=\mathcal{M}^{(2)}\vec{f},$$

где эквивалентные преобразования группируются в матрицах $\mathcal{G}^{(2)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$, $\mathcal{M}^{(2)}$, а приближенные – только в матрице $\mathcal{B}^{(2)}$. Причем проводимые преобразования устойчивы, сохраняют свойство построчного диагонального преобладания и противоположность знаков диагональных и внедиагональных элементов.

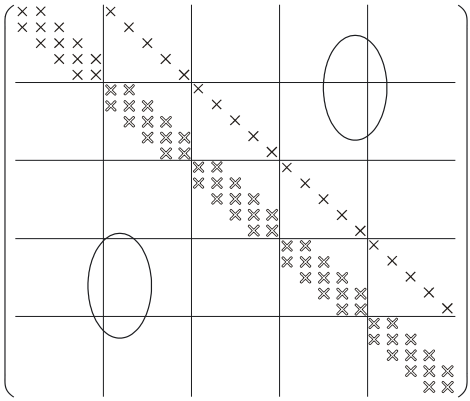


Рис. 2

В конце проходов по всем расчетным линиям (рядам клеток) исходная система примет вид $\mathcal{G}^{(n)}\vec{\Phi}^{(k+1)}+\theta\mathcal{B}^{(n)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}+\mathcal{L}^{(n)}\vec{\Phi}^{(k)}=\mathcal{M}^{(n)}\vec{f}$,

где эквивалентные преобразования содержатся в матрицах $\mathcal{G}^{(n)}$, $\mathcal{L}^{(n)}$, $\mathcal{M}^{(n)}$, а приближенные – только в матрице $\mathcal{B}^{(n)}$, причем матрица $\mathcal{G}^{(n)}+\theta\mathcal{B}^{(n)}$ по свой структуре четырехдиагональная и положительного типа (рис. 2), откуда следует разрешимость полученной системы.

В случае сходимости $\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}\to 0$ влияние члена, содержащего приближенные преобразования, станет несущественным. Поскольку операторы $\mathcal{G}^{(n)}$, $\mathcal{L}^{(n)}$ и $\mathcal{M}^{(n)}$ – суть чисто эквивалентные преобразования, не меняющие решение исходной системы, то путем обратной цепочки преобразований можно получить явный вид оператора воздействия на первоначальную систему уравнений.

$$\left\{E_{(0)}^{(n)}+E_{(p)}^{(n)}H^{(n)}\left[E-\left(\prod_{j=m\text{-}1}^{1}M_{(+)}^{(n-1\,j)}+\prod_{j=2}^{m}M_{(-)}^{(n-1\,j)}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{E_{(0)}^{(n-1)}+E_{(p)}^{(n-1)}H^{(n-1)}\left[E-\left(\prod_{j=m\text{-}1}^{1}M_{(+)}^{(n-2\,j)}+\prod_{j=2}^{m}M_{(-)}^{(n-2\,j)}\right)\right]\right\}\times\ \ ...$$

$$...\ \ \times\left\{E_{(0)}^{(2)}+E_{(p)}^{(2)}H^{(2)}\left[E-\left(\prod_{j=m\text{-}1}^{1}M_{(+)}^{(1\,j)}+\prod_{j=2}^{m}M_{(-)}^{(1\,j)}\right)\right]\right\}\times\left(A\vec{\Phi}^{(*)}-\vec{f}\right)=0.$$

Понятно, что решение подобной системы является также решением исходной системы, при этом фигурные скобки представляют собой комбинацию невырожденных элементарных нижних и верхних матриц преобразований, которая не приводит к возникновению других дополнительных решений. Следовательно, решения исходной и преобразованной систем совпадают.

На основании проведенных исследований показано, что алгоритм метода путем пошаговых устойчивых преобразований переводит исходную систему уравнений к виду $W\left(\vec{\Phi}^{k+1}-\vec{\Phi}^{k}\right)=R\left(A\vec{\Phi}^{k}-\vec{f}\right)$, где $W=W(\theta)$ – удобно разрешаемый оператор с четырехдиагональной почти верхнетреугольной матрицей; R – оператор невырожденных эквивалентных преобразований; θ – итерационный параметр компенсации. При этом матрицы операторов W и R выписываются явным образом. Нетрудно видеть, что в этом случае вопрос о корректности метода решается естественным образом.

Литература

1. **Ильин В.П.** Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995.
2. **Фомин А.А., Фомина Л.Н.** Полинейный рекуррентный метод решения СЛАУ с пятидиагональной матрицей // Четвертая Сибирская школа-семинар по параллельным и высокопроизводительным вычислениям (Томск, 9–11 октября 2007 г.). Томск: Дельтаплан, 2008. С. 192-200.
3. **Фомина Л.Н.** Использование полинейного рекуррентного метода с переменным параметром компенсации для решения разностных эллиптических уравнений // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14, № 4. С. 108-120.