Схема «предиктор – корректор» с заданными свойствами для одномерных изотермических уравнений газовой динамики

С.В. Белов, В.В. Жаровцев
Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики, Томск

Кроме аппроксимации и устойчивости на разностные уравнения и сетку накладываются дополнительные требования: минимальный сеточный шаблон, неотрицательная аппроксимация, минимальная аппроксимационная вязкость, повышенная устойчивость.

Систему нестационарных уравнений идеального изотермического газа с одной пространственной переменной запишем в виде

$$\varphi_t + \left(u\varphi + \psi\right)_x = 0\ ,\ \varphi = \left(\rho, \rho u\right)^T,\ \ \psi = \left(0, p\right)^T,\ \ p = c^2\rho\ , \quad (1)$$

где t – время; x – декартова координата; ρ – плотность; u – скорость; p – давление; c – изотермическая скорость звука; T – знак транспонирования. Для простоты изложения полагаем, что область интегрирования системы (1) есть прямоугольник, в котором вводится равномерная по пространственной координате и не равномерная по времени прямоугольная сетка с шагами $\Delta x = x_{i+0.5} - x_{i-0.5}$, $(i = 0,1,...,N)$, где N – число ячеек сетки по пространственной координате, и $\Delta t^{n+0,5} = t^{n+1} - t^n$ ($n = 0,1,\ldots,n_k$). Значения параметров газа определяются в центрах ячеек, а также на границах между соседними ячейками сетки. Используя обозначения $F(g^l_k, h^l_k, \ldots, q^l_k) = F^l_k$, где F – некоторая функция своих аргументов, разностный аналог системы (1) запишем так:

$$\varphi^{n+1}_{i+0,5} = \varphi^n_{i+0,5} - \Delta t^{n+0,5}\left[\left(\varphi\, u + \psi\right)^*_{i+1} - \left(\varphi\, u + \psi\right)^*_i\right] \Big/ \Delta x\ . \quad (2)$$

Вычисления по формулам (2) можно производить после того, как указан алгоритм нахождения как шага по времени, так и параметров газа на границах между соседними ячейками разностной сетки. Особый интерес для практики представляют разностные схемы, использующие минимальный сеточный шаблон $\left(t^{n+a}, x_{i+0,5+b}\right)$, $a = 0,1\,;\, b = -1,0,1$, поскольку в таких случаях в приграничных и внутренних точках сетки параметры газа рассчитываются по одним и

тем же формулам. Кроме этого, известно, что в ряде случаев за счет простоты и эффективности алгоритмов распараллеливания явные разностные схемы не уступают неявным. Все это учитывается при построении формул для расчета параметров газа на предварительном этапе. Для этого систему (1) перепишем в нескольких эквивалентных видах. Так, уравнение неразрывности эквивалентно каждому из соотношений

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0\,,\ \left(\ln\rho\right)_t + u\rho^{-1}\rho_x + u_x = 0\,,\ \left(\ln\rho\right)_t + u\left(\ln\rho\right)_x + u_x = 0\,, \quad (3)$$

а вместо закона сохранения импульса можно использовать любое из уравнений

$$\left(\rho u\right)_t + u\left(\rho u\right)_x + \left(\rho u\right)u_x + p_x = 0\,,\ \left(u\right)_t + u\left(u\right)_x + \rho^{-1}\left(p\right)_x = 0\,. \quad (4)$$

Привлекая подход, предложенный в [1] для определения ρ_i^* и u_i^*, построим разностные аналоги соответствующих уравнений из (3) и (4).

$$\rho_i^* = \rho_i^n - 0.5\left(\alpha_1+\beta_1\right)\left(\rho_{i+0,5}^n - \rho_{i-0,5}^n\right) - 0.5\left(\alpha_2-\beta_2\right)\rho_i^n\left(u_{i+0,5}^n - u_{i-0,5}^n\right)\Big/c_i^n\,,$$

$$\ln\left(\rho_i^*/\rho_i^n\right) = -0.5\left(\alpha_1+\beta_1\right)\left(\rho_{i+0,5}^n - \rho_{i-0,5}^n\right)\Big/\rho_i^n - 0.5\left(\alpha_2-\beta_2\right)\left(u_{i+0,5}^n - u_{i-0,5}^n\right)\Big/c_i^n\,,$$

$$\ln\left(\rho_i^*/\rho_i^n\right) = -0.5\left(\alpha_1+\beta_1\right)\ln\left(\rho_{i+0,5}^n/\rho_{i-0,5}^n\right) - 0.5\left(\alpha_2-\beta_2\right)\left(u_{i+0,5}^n - u_{i-0,5}^n\right)\Big/c_i^n\,, \quad (5)$$

$$\left(\rho u\right)_i^* = \left(\rho u\right)_i^n - 0.5\left(\alpha_3+\beta_3\right)\Big(\left(\rho u\right)_{i+0,5}^n - \left(\rho u\right)_{i-0,5}^n\Big) -$$

$$-\left(\alpha_4-\beta_4\right)\Big(p_{i+0,5}^n - p_{i-0,5}^n + \left(\rho u\right)_i^n\left(u_{i+0,5}^n - u_{i-0,5}^n\right)\Big)\Big/\left(2c_i^n\right),$$

$$u_i^* = u_i^n - 0.5\left(\alpha_3+\beta_3\right)\left(u_{i+0,5}^n - u_{i-0,5}^n\right) - 0.5\left(\alpha_4-\beta_4\right)\left(p_{i+0,5}^n - p_{i-0,5}^n\right)\Big/\left(\rho c\right)_i^n\,,$$

$$\alpha_{i,n}^k = \Delta t_k\left(u_i^n + c_i^n\right)\Big/\Delta x\,,\ \beta_{i,n}^k = \delta t_k\left(u_i^n - c_i^n\right)\Big/\Delta x\,,\ \omega_i^n = 0.5\left(\omega_{i+0.5}^n + \omega_{i-0.5}^n\right),\ \omega = (\rho, c, u)^T\,.$$

Число неповторяющихся сочетаний первых трех и последних двух разностных уравнений равно шести, поскольку из-за «рассогласованности» своих членов разностные уравнения в этих группах не эквивалентны друг другу. Таким образом, на минимальном сеточном шаблоне записано шесть семейств разностных схем (2), (5), аппроксимирующих систему (1) с первым порядком и зависящих от параметров Δt_j и δt_j $\left(j = \overline{1,4}\right)$.

Чтобы определить значения этих параметров, рассмотрим линейное приближение системы (1). У линеаризованных уравнений постоянные параметры отметим индексом «0». Введем новую функцию $\bar{\rho} = \rho c_0/\rho_0$. Тогда соответствующая системе (1) линейная система имеет вид

$$U_t + A U_x = 0\ ,\ A=\begin{pmatrix} u_0 & c_0 \\ c_0 & u_0 \end{pmatrix},\ U = (\overline{\rho}, u)^T\ , \qquad (6)$$

а единственное четырехпараметрическое семейство разностных схем для системы (6) можно записать так:

$$U_{i+0,5}^{n+1} = U_{i+0,5}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} A\left(U_{i+0,5}^{*} - U_{i-0,5}^{*}\right),\ U_i^{*} = U_i^n - B\left(U_{i+0,5}^{n} - U_{i-0,5}^{n}\right),$$

(7)

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 & \alpha_4 + \beta_4 \end{pmatrix},\ \alpha_j = \frac{\Delta t_j}{\Delta x}\left(u_0 + c_0\right)\ \ \beta_j = \frac{\delta t_j}{\Delta x}\left(u_0 - c_0\right).$$

Подставив второе уравнение из (7) в первое, получим соотношения

$$U_i^{n+1} = D_{-1} U_{i-1}^n + D_0 U_i^n + D_1 U_{i+1}^n,\ D_{-1,1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} AB \pm \frac{\Delta t}{2\Delta x} A\ ,\ D_0 = E - 2\frac{\Delta t}{\Delta x} AB\ , \qquad (8)$$

где E – единичная матрица. Для выделения схем с неотрицательной аппроксимацией найдем собственные значения матриц $D_{-1,1}$, D_0. В явном виде их удалось выписать, когда

$$\Delta t_4 = \Delta t_1\ ,\ \Delta t_3 = \Delta t_2\ ,\ \delta t_4 = \delta t_1\ ,\ \delta t_3 = \delta t_2\ ,\ \Delta t_2 = \Delta t_1\ ,\ \delta t_2 = \delta t_1\ . \qquad (9)$$

Теперь свободными остались два параметра. В результате достаточно громоздких выкладок имеем, что при выполнении условий

$$2\Delta t_1 \left|u_0 + c_0\right| \ge \Delta x\ ,\ 2\delta t_1 \left|u_0 - c_0\right| \ge \Delta x\ ,$$

$$\Delta t\left((u_0 + c_0)^2 (2\,\Delta t_1)/\Delta x\right) \le \Delta x,\quad \Delta t\left((u_0 - c_0)^2 (2\,\delta\, t_1)/\Delta x\right) \le \Delta x \qquad (10)$$

все собственные значения матриц $D_{-1,1}$, D_0 неотрицательны. То есть из восьмипараметрического семейства (7) выделено двухпараметрическое семейство разностных схем (параметры Δt_1, , δt_1) с неотрицательно определенными матрицами. В силу выполнения условий теоремы Фридрихса соотношения (9), (10) являются достаточными условиями устойчивости схем (7).

Для оставшегося двухпараметрического семейства схем первое дифференциальное приближение имеет вид

$$U_t + A U_x = \Delta x C U_{xx}\ ,\ C = A\left(B - A\Delta t/(2\Delta x)\right), \qquad (11)$$

где матрица C определяет величину аппроксимационной вязкости. Можно показать, что ее норма достигает своего минимума, когда

$$\Delta t_1 \left|u_0 + c_0\right| / \Delta x = 0.5\ ,\ \delta t_1 \left|u_0 - c_0\right| / \Delta x = 0.5\ . \qquad (12)$$

Тогда из (10) следует, что $\kappa \le 1$, где $\kappa = \Delta t\left(\left|u_0\right| + c_0\right)/\Delta x$ – число Куранта.

Операторы согласованного сглаживания для (2), (5) по верхнему и нижнему слоям запишем так [2]:

$$\overline{\varphi}^{\,n+1}_{i+0,5}=\left(P+F_n\right)\varphi^{\,n}_{i+0,5},\ \varphi^{\,n+1}_{i+0,5}=\left(I+F_b\right)\overline{\varphi}^{\,n+1}_{i+0,5},$$

$$F_n\varphi^{\,n}_{i+0,5}=\theta_n\left(f^n_{i+1}-f^n_i\right),\ F_b\overline{\varphi}^{\,n+1}_{i+0,5}=\theta_b\left(\overline{f}^{n+1}_{i+1}-\overline{f}^{n+1}_{i+1}\right),\ \Delta\rho_i=\rho_{i+0,5}-\rho_{i-0,5},$$

$$f_i=\begin{cases}\left(\varphi_{i+0,5}-\varphi_{i+0,5}\right), & \left(\Delta\rho_i\Delta\rho_{i+1}\right)<0\vee\left(\Delta\rho_i\Delta\rho_{i-1}\right)<0,\\ 0 \quad в \quad противоположном \quad случае,\end{cases}$$

где I – единичный оператор; P – один из операторов (2), (5). θ_n и θ_b – параметры сглаживания. Для схемы (7), (9), (12) удалось показать, что когда $\theta_n=3\sqrt{2}/2-2\approx 0{,}1213$, $\theta_b=\left(4-\sqrt{2}\right)/14\approx 0{,}1847$, то $\kappa\le 4-2\sqrt{2}\approx 1{,}171$.

Все отмеченные выше дополнительные свойства разностной схемы (2), (5) (первое и четвертое уравнения) были проверены на решении тестовой задачи, в качестве которой была выбрана задача о распаде произвольного разрыва, решение которой определяется давлением слева от разрыва. На рис. 1 и 2 представлены профили давлений в фиксированные моменты времени (сплошные кривые соответствуют точному решению, а штриховые – численному, когда $N=1000$). Численные результаты на рис. 1 соответствует расчетам, когда $\theta_n=\theta_b=0$, $\kappa=1$, а на рис. 2 – когда $\theta_n=0{,}1213$, $\theta_b=0{,}1847$, $\kappa=12/10$.

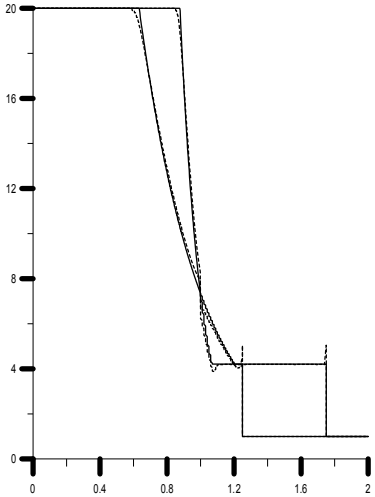


Рис. 1

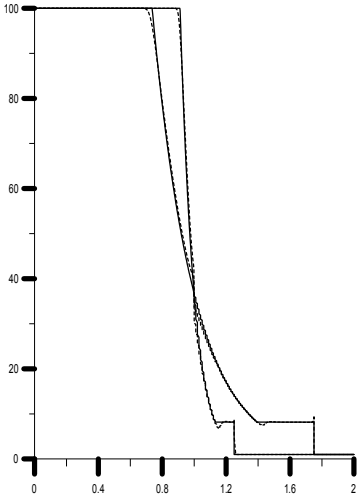


Рис. 2

Литература

1. **Жаровцев В.В.** Явные схемы с неотрицательной аппроксимацией на минимальном сеточном шаблоне для одномерных уравнений газовой динамики //Вычислительная гидродинамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. С. 84-88.
2. **Жмакин А.И., Фурсенко А.А.** Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета // ЖВММФ. 1980. Т. 20, № 4. С. 1021-1031.