Новый тип эрмитовых сплайн-вейвлетов пятой степени*

Д.А. Турсунов, Б.М. Шумилов, Э.А. Эшаров, Э.А. Турсунов
Ошский государственный университет, Киргизия
Томский государственный архитектурно-строительный университет

Новый тип вейвлетов построен в базисе эрмитовых сплайнов пятой степени. Носителем материнских вейвлетов является отрезок [–1, 1]*, при этом один из них антисимметричный, а два других – симметричные.*

Введение

Вейвлеты используют в тех случаях, когда результат анализа некоего сигнала должен содержать не только перечисление его характерных частот (масштабов), но и сведения об определенных локальных координатах, при которых эти частоты проявляют себя. Это бывает важно при анализе и обработке нестационарных (во времени) или неоднородных (в пространстве) сигналов. Общий принцип построения базиса вейвлет-преобразования состоит в использовании масштабного преобразования и смещений. Именно за счет изменения масштабов вейвлеты способны выявить различие в характеристиках на разных шкалах, а путем сдвига проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. При анализе нестационарных сигналов, за счет свойства локальности, вейвлеты получают существенное преимущество перед преобразованием Фурье.

Введем обозначения: $\langle u, v\rangle := \int_R u(x)v(x)dx$, $u(x), v(x) \in L_2(R)$ – скалярное произведение; $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ – норма функции f в $L_2(\mathbf{R})$; Π_k – множество многочленов степени k, (k=0, 1, 2,…); V_n – пространство сплайнов пятой степени, удовлетворяющих следующим условиям, n>0:

а) $v \in C[0, 1] \cap C'[0, 1] \cap C''[0, 1]$;

б) $v(x) \in \prod_5, x \in (j/2^n, (j+1)/2^n), j=0, \ldots, 2^n-1$; $\dim(V_n)=2^{n+1}$.

И. Добеши построила полуортогональные вейвлеты неполиномиального типа с компактным носителем [1]. Чуи и Вонг построили полуортогональные сплайн-вейвлеты [2]. Вонг построил базис кубиче-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №09-07-90901, №09-01-90716.

ских сплайн-вейвлетов в пространстве Соболева [3]. Донован и др. построили ортогональные мультивейвлеты [4]. Недостатками построенных ранее вейвлетов является то, что они либо не имеют аналитического представления, либо расположены на достаточно широком носителе. И то и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании.

Пусть ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 – базисные эрмитовы сплайны пятой степени (рис. 1):

$$\phi_1(t)=\begin{cases}(t+1)^3\left(1-3t+6t^2\right) & \text{при} \quad -1\le t\le 0,\\ (1-t)^3\left(1+3t+6t^2\right) & \text{при} \quad 0\le t\le 1,\end{cases}$$

$$\phi_2(t)=\begin{cases}(t+1)^3\left(t-3t^2\right) & \text{при} \quad -1\le t\le 0,\\ (1-t)^3\left(t+3t^2\right) & \text{при} \quad 0\le t\le 1,\end{cases} \qquad \phi_3(t)=\begin{cases}(t+1)^3\dfrac{t^2}{2} & \text{при} \quad -1\le t\le 0,\\ (1-t)^3\dfrac{t^2}{2} & \text{при} \quad 0\le t\le 1.\end{cases}$$

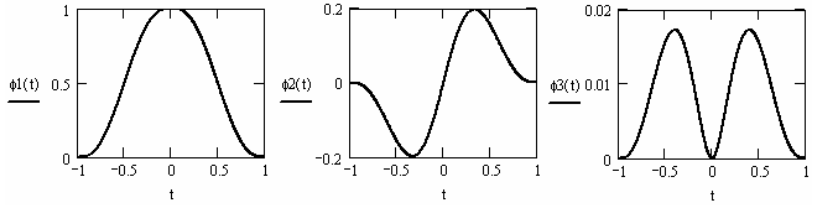


Рис. 1. Графики базисных эрмитовых сплайнов пятой степени: ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3

Дамен и др. построили биортогональные мультивейвлеты в базисе эрмитовых кубических сплайнов [5]. Отметим, что их конструкция базисных вейвлетов выглядит слишком сложно. В [6] описаны «ленивые» ортонормальные кубические эрмитовы сплайн-вейвлеты на суперкомпактном носителе [–1, 1], однако свойство полуортогональности для них не выполняется. В [7] было доказано, что полуортогональные кубические мультивейвлеты на суперкомпактном носителе можно построить относительно скалярного произведения $\langle u', v'\rangle$. Используя эту же идею, мы построили базисные вейвлеты на пространстве эрмитовых сплайнов пятой степени. В отличие от классических вейвлетов Чуи и Вонга, эти вейвлеты имеют меньший носитель, а в отличие от ранее построенных вейвлетов, они обладают свойством ортогональности относительно скалярного произведения $\langle u'', v''\rangle$.

Сплайн-вейвлеты

Пусть S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3. Функция g принадлежит пространству S тогда

и только тогда, когда существуют последовательности b_1, b_2 и b_3 на $\mathbf{Z}$, для которых выполняется равенство

$$g = \sum_{j\in Z}\left[b_1(j)\varphi_1(\cdot - j) + b_2(j)\varphi_2(\cdot - j) + b_3(j)\varphi_3(\cdot - j)\right]\cdot$$

Пусть $S_1=\{g(2\cdot)\colon g\in S\}$, тогда $S\subset S_1$. Мы потребуем выполнение равенств

$$\langle \psi''_1,\ \phi''_m(-j)\rangle = \langle \psi''_2,\ \phi''_m(-j)\rangle = \langle \psi''_3,\ \phi''_m(-j)\rangle = 0,\ m=1,2,3\ \ \forall j\in\mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Здесь

$$\varphi_1''(t) = \begin{cases} 60t + 180t^2 + 120t^3 & \text{при } -1\le t\le 0,\\ -60t + 180t^2 - 120t^3 & \text{при } 0\le t\le 1,\end{cases}$$

$$\varphi_2''(t) = \begin{cases} -36t - 96t^2 - 60t^3 & \text{при } -1\le t\le 0,\\ -36t + 96t^2 - 60t^3 & \text{при } 0\le t\le 1,\end{cases} \quad \varphi_3''(t) = \begin{cases} 1 + 9t + 18t^2 + 10t^3 & \text{при } -1\le t\le 0,\\ 1 - 9t + 18t^2 - 10t^3 & \text{при } 0\le t\le 1.\end{cases}$$

Предположим, что

$$\psi(x) = \sum_{k\in Z}\left[b_1(k)\varphi_1(2x-k) + b_2(k)\varphi_2(2x-k) + b_3(k)\varphi_3(2x-k)\right],\ x\in R\cdot$$

Тогда для $\forall j\in\mathbf{Z}$ имеем:

$$\langle \psi'', \varphi_1''(-j)\rangle = -15b_1(2j-2) + 30b_1(2j) - 15b_1(2j+2) - 39b_2(2j-2) + 48b_2(2j-1) - 48b_2(2j+1) + 39b_2(2j+2) - 3b_3(2j-2) + 6b_3(2j) - 3b_1(2j+2);$$

$$\langle \psi'', \varphi_2''(-j)\rangle = 720b_1(2j-2) - 840b_1(2j-1) + 840b_1(2j+1) - 20b_1(2j+2) + 696b_2(2j-2) - 960b_2(2j-1) + 1728b_2(2j) - 960b_2(2j+1) + 696b_2(2j+2) + 53b_3(2j-2) - 14b_3(2j-1) + 14b_3(2j+1) - 53b_3(2j+2);$$

$$\langle \psi'', \varphi_3''(-j)\rangle = -240b_1(2j-2) + 840b_1(2j-1) - 1200\, b_1(2j) + 840b_1(2j+1) - 240b_1(2j+2) - 176b_2(2j-2) + 320b_2(2j-1) - 320b_2(2j+1) + 176b_2(2j+2) - 13b_3(2j-2) + 14b_3(2j-1) + 54b_3(2j) + 14b_3(2j+1) - 13b_3(2j+2).$$

Введем преобразование Лапласа последовательностей b_1, b_2 и b_3 на $\mathbf{Z}$, так что положительная или отрицательная степень z означает сдвиг на один шаг по шаблону узлов эрмитового сплайна вправо или влево соответственно. Тогда

$$q_{11}(z) = \sum_{j\in Z} b_1(2j+1)z^{2j+1},\ q_{12}(z) = \sum_{j\in Z} b_1(2j)z^{2j},$$

$$q_{21}(z) = \sum_{j\in Z} b_2(2j+1)z^{2j+1},\ q_{22}(z) = \sum_{j\in Z} b_2(2j)z^{2j},$$

$$q_{31}(z) = \sum_{j\in Z} b_3(2j+1)z^{2j+1},\ q_{32}(z) = \sum_{j\in Z} b_3(2j)z^{2j}\ .$$

Решение однородного функционального уравнения

$$Q(z)(q_{11}(z),\ q_{12}(z),\ q_{21}(z),\ q_{22}(z))^{\mathrm{T}} = 0,\ z\in C\setminus\{0\},\ j\in\mathbf{Z},$$

$$Q(z)=\begin{Bmatrix} 0 & -15z^2+30-15z^{-2} & 48z-48z^{-1} \\ -840z+840z^{-1} & 720z^2-720z^{-2} & -960z-960z^{-1} \\ 840z+840z^{-1} & -240z^2-1200-240z^{-2} & 320z-320z^{-1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -39z^2+39z^{-2} & 0 & -3z^2+6-3z^{-2} \\ 696z^2+1728+696z^{-2} & -14z+14z^{-1} & 53z^2-53z^{-2} \\ -176z^2+176z^{-2} & 14z+14z^{-1} & -13z^2+54-13z^{-2} \end{matrix}\Bigg\}$$

будет означать, что $\langle \psi'', \phi''_m(-j)\rangle=0$, m=1,2,3.

Отсюда находим три независимых решения:

$q_{11}(z)=z^{-1}+z$, $q_{12}(z)=0$, $q_{21}(z)=0$, $q_{22}(z)=0$, $q_{31}(z)=-60z^{-1}-60z$, $q_{32}(z)=0$;

$q_{11}(z)=2(z^{-1}-z)$, $q_{12}(z)=0$, $q_{21}(z)=13(z^{-1}-z)$, $q_{22}(z)=16$, $q_{31}(z)=-24(z^{-1}+z)$, $q_{32}(z)=0$;

$q_{11}(z)=z^{-1}+z$, $q_{12}(z)=0$, $q_{21}(z)=-z^{-1}+z$, $q_{22}(z)=0$, $q_{31}(z)=-68(z^{-1}+z)$, $q_{32}(z)=16$.

Эти три решения порождают три материнских вейвлета ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$\psi_1(x)=\phi_1(2x+1)-\phi_1(2x-1)-60\phi_3(2x+1)-60\phi_3(2x-1),\ \psi_2(x)=2\phi_1(2x+1)-$$
$$-2\phi_1(2x-1)+13\phi_2(2x+1)+13\phi_2(2x-1)+16\phi_2(2x)-24\phi_3(2x+1)+24\phi_3(2x-1),$$
$$\psi_3(x)=\phi_1(2x+1)+\phi_1(2x-1)-\phi_2(2x+1)+\phi_2(2x-1)-68\phi_3(2x+1)-68\phi_3(2x-1)+16\phi_3(2x).$$

Носителем ψ_1, ψ_2, ψ_3 является отрезок [–1, 1]. Они удовлетворяют условию (1). При этом ψ_1 – антисимметричен, а ψ_2, ψ_3 – симметричны (рис. 2).

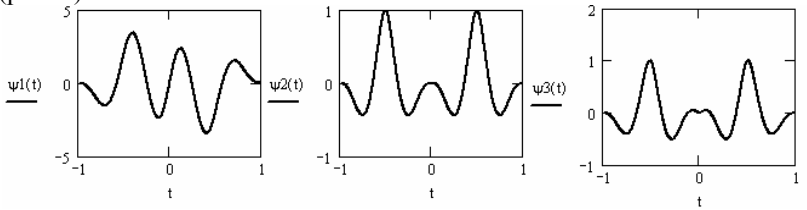


Рис. 2. Графики эрмитовых сплайн-вейвлетов пятой степени

Вывод

Полученные результаты позволяют высказать гипотезу о том, что для построения эрмитовых сплайн-вейвлетов ($2n$+1)-й степени с суперкомпактным носителем достаточно требовать полуортогональность со скалярным произведением $<u^{(n)}, v^{(n)}>$.

Литература

1. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. Москва; Ижевск: РХД, 2001.
2. **Chui C.K., Wang J.Z.** On compactly supported wavelets and a duality principle// Trans. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 330. P. 903-916.

3. **Wang J.Z.** Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation // Appl. Comput. Harmonic Anal. 1996. Vol. 3. P. 154-163.
4. **Donovan G., Geronimo J.S., Hardin D.P., Massopust P.R.** Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions // SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 27. P. 1158-1192.
5. **Dahmen W., Jia Han R.Q. and Kunoth A.** Biorthogonal multiwavelets on the interval: Cubic Hermite splines // Constr. Approx. 2000. Vol. 16. P. 221-259.
6. **Шумилов Б.М., Эшаров Э.А.** Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник ТГУ. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. Приложение. 2006. № 19. С. 260-266.
7. **Jia R.-Q., Liu S.-T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. 2006. Vol. 25. P. 23-39.