Вариационное моделирование пространственных кривых с помощью нового типа эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов*

Н.К. Аркабаев, Б.М. Шумилов, Э.А. Эшаров, А.Ж. Кудуев
Ошский государственный университет, Киргизия
Томский государственный архитектурно-строительный университет

Описано построение соотношений разложения и восстановления для нового типа эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов, полуортогональных в метрике <u',v'>. Предложено применение полученной системы базисных сплайн-мультивейвлетов для вариационного моделирования трасс автомобильных дорог и других линейно-протяженных пространственных объектов.

Вейвлет-преобразование является математическим инструментом, с помощью которого можно иерархически разложить заданную функцию (сигнал, изображение, кривую или поверхность) на грубое приближенное представление с некоторыми деталями. И. Добеши [1] впервые построила ортонормальные вейвлеты неполиномиального типа с компактным носителем. Чуи и др. [2] построили полуортогональные сплайн-вейвлеты. Недостатками построенных ранее вейвлетов [1–3] является то, что они либо не имеют аналитического представления, либо расположены на достаточно широком носителе. И то и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения задач численного анализа.

Один из конструктивных подходов к построению вейвлетов состоит в использовании базисных *B*-сплайнов. Пусть степень восполняющего многочлена равна 3. Здесь *восполняющий многочлен* – это многочлен, который совпадает со значениями сплайн-реконструкции соответствующего вейвлета между узлами (точками склейки соседних кусков сплайна). В [4] был предложен новый тип эрмитовых мультивейвлетов, полуортогональных в метрике $\langle u', v' \rangle$. Доказано, что предложенное условие полуортогональности позволяет уменьшить длину носителя базисных вейвлетов до величины [0,2]. В данной работе для этого типа мультивейвлетов с помощью предложенного в [5] метода

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №09-07-90900, №09-01-90716.

неопределенных коэффициентов получены соотношения разложения и восстановления.

Двухмасштабные соотношения для базисных эрмитовых сплайнов 3-й степени можно получить в виде следующих формул [7]:

$$\varphi_3(t)=\frac{1}{2}\varphi_3(2t)+\varphi_3(2t-1)+\frac{1}{2}\varphi_3(2t-2)+\frac{3}{4}\big(\psi(2t)-\psi(2t-2)\big),$$
$$\psi(t)=\frac{1}{2}\psi(2t-1)-\frac{1}{8}\psi(2t)-\frac{1}{8}\psi(2t-2)-\frac{1}{8}\Big(\varphi_3(2t)-\varphi_3(2t-2)\Big). \qquad (1)$$

Здесь [6]: $\varphi_3(t)=\begin{cases}(1-t)^2(1+2t), & 0\le t\le 1,\\ t^2(3-2t), & 1\le t\le 2,\\ 0, & t\notin[0,2];\end{cases}$ $\psi(t)=\begin{cases}t(1-t)^2, & 0\le t\le 1,\\ -t^2(1-t), & 1\le t\le 2,\\ 0, & t\notin[0,2].\end{cases}$

Базисные вейвлеты представляют дополнение пространства сплайн-разложений на прореженной сетке до пространства сплайнов на густой сетке:

$$\psi\varphi_3(x)=-2\varphi_3(2x)+4\varphi_3(2x-1)-2\varphi_3(2x-2)-21\psi(2x)+21\psi(2x-k), \qquad (2)$$
$$\psi\psi(x)=\varphi_3(2x)-\varphi_3(2x-2)+9\psi(2x)+12\psi(2x-1)+9\psi(2x-k). \qquad (3)$$

Определение. Пусть имеется двумерный дискретный сигнал, содержащий значения в узлах эрмитового сплайна и его производные $\{S=\{s_j\}, S'=\{s'_j\}\}$, $j=0,1,\ldots,m$, $m=2^k$, $k\ge 1$. Согласно (1)–(3) вычисляются значения:

$$v_j=\frac{1}{4}(S_{2j}+2S_{2j+1}+S_{2j+2})+\frac{3}{8}(S'_{2j}-S'_{2j+2}),\ v'_j=-\frac{1}{2}(S'_{2j}-4S'_{2j+1}+S'_{2j+2})-\frac{1}{2}(S_{2j}-S_{2j+2}), \qquad (4)$$
$$w_j=-2S_{2j}+4S_{2j+1}-2S_{2j+2}-21S'_{2j}+21S'_{2j+2},\ w'_j=S_{2j}-S_{2j+2}+9S'_{2j}+12S'_{2j+1}+9S'_{2j+2}.$$

Эти значения формируют два новых двумерных сигнала $\{V=\{v_j\}$, $V'=\{v'_j\}\}$ и $\{W=\{w_j\}$, $W'=\{w'_j\}\}$, $j=0,1,\ldots,2^{m-1}$, первый из которых является огрубленной версией исходного сигнала (каждой тройке элементов S соответствует их экспоненциальное среднее, так что для случая линейных зависимостей значения v_j и v'_j в точности равны соответствующим промежуточным значениям S_{2j+1} и S'_{2j+1}). Коэффициенты w_j и w'_j далее называем *вейвлет-коэффициентами*, и они содержат детализирующую информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала в соответствии с формулами

$$S_{2j}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}w_j+7v_j-3S_{2j-1}-3S_{2j+1}\right),\ S'_{2j}=\frac{1}{24}\left(\frac{w'_j+144w_j}{7}+5S'_{2j-1}+5S'_{2j+1}\right) \qquad (5)$$

для четных узлов. Недостающие значения для нечетных узлов определяются из соотношений

$$35S_{2j-1} - 74S_{2j+1} + 35S_{2j+3} = \frac{1}{4}(w_{j+1} + w_j) - v_{j+1} - v_j + 24(v'_j - v'_{j+1} + \frac{1}{g_1}(w'_j - w'_{j+1})),$$
$$-\frac{1}{2}S'_{2j-1} + 5S'_{2j+1} - \frac{1}{2}S'_{2j+3} = 4(v_{j+1} - v_j) + \frac{4}{q_1}(w_{j+1} - w_j) - 16(v'_j + v'_{j+1} + \frac{1}{g_1}(w'_j + w'_{j+1})). \quad (6)$$

Для замыкания полученных трехдиагональных систем уравнений добавляются по два оборванных слева и справа уравнения. Формулы (4) и (5), (6) определяют, соответственно, *прямое и обратное преобразование* двумерного дискретного сигнала на любом уровне разрешения.

В пакете программ автоматизированного проектирования автомобильных дорог (САПР «IndorCAD/RoAD», ООО «Индорсофт», г. Томск) [8]) трасса автомобильной дороги описывается как набор отрезков прямой и дуг окружностей, к которым добавлены сопряжения кривых плана дугами клотоид и кривыми Безье, а также интерполяция кривых профиля кубическими сплайнами. В процессе редактирования плана и профиля пользователь производит операции с геометрическими элементами изображения явным образом – либо передвигая контрольные точки и решая задачу сплайн-интерполяции [6] (метод «прямого манипулирования»), либо прибегая к сглаживанию кривой в заданном коридоре ограничений с помощью многократного применения формул сплайн-фильтрации [9, 10]. Известны, по крайней мере, еще два подхода к редактированию плоских сплайн-кривых. Первый состоит в решении полной задачи построения сплайна в выпуклом множестве [9]. Достоинством этого подхода является то, что в процессе решения экстремальной задачи удаляются «лишние» узлы, в результате чего достигается сжатие информации. Недостатки проявляются в неестественности минимизируемого функционала (интеграл от квадрата второй производной вместо полной кривизны), возможности утраты существенной, с точки зрения инженера-дорожника, информации и отсутствии надежных алгоритмов. Второй подход основан на методике вставки/удаления узлов *B*-сплайн разложения [11], когда поведение сплайн-кривой локально уточняется по мере введения дополнительных узлов либо кривая сглаживается путем идентификации и затем удаления «плохих» узлов. Некоторые предложения по правилам отбора удаляемых узлов в соответствии с аппроксимационным критерием содержатся, например, в [12]. Общее правило гласит, что если число параметров сплайна меньше, чем число предписанных пользователем значений положения, касательных и/или значений старших производных в некоторых узлах, то отыскивается решение в смысле метода наименьших квадратов; если же число параметров больше, чем число связей, то применяется некоторый вариант метода регуляриза-

ции А.Н. Тихонова [13]. Преимущество этого подхода состоит в возможности перехода к *B*-сплайн-вейвлет разложению с целью реализации кратномасштабного анализа [2] при редактировании сплайн-кривой. Последовательное осуществление метода лифтинга [3] в процессе кратномасштабного анализа продемонстрировано в [14]. В статье [15], наоборот, вейвлет-преобразование нового типа используется непосредственно для разложения исходной кривой на различные частотные составляющие. Высокочастотные шумы могут быть отфильтрованы в процессе реконструкции. При этом настоятельно требуется, чтобы алгоритм фильтрации ограничивался ликвидацией нежелательных дефектов и сохранял изогеометрические характеристики кривой [8]. Использование здесь эрмитовых сплайнов позволяет в явном виде, через значения сплайн-коэффициентов, учесть как геометрические ограничения на контрольные точки сплайна (пикеты автомобильной трассы), так и на тангенсы трассы (заданные направления касательных, например, при въезде на мостовое сооружение). Дополнительно ожидается ускорение вычислений на каждой итерации кратномасштабного анализа за счет уменьшения носителей базисных мультивейвлетов. В [14] представлен еще один метод ускорения вычислений, при котором все геометрические ограничения приводятся к одному уровню вейвлет-иерархии и минимизируется только кривизна полученной сплайн-кривой. Этот прием позволяет сохранить детали исходной кривой, которые обычно теряются в обычном методе вариационного моделирования.

Литература

1. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 332 с.
2. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. **Столниц Э., Де Роуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.
4. **Jia R.-Q., Liu S.-T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. 2006. Vol. 25. P. 23-39.
5. **Шумилов Б.М., Эшаров Э.А.** Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. Приложение. 2006. № 19. С. 260-266.

6. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
7. **Heil C., Strang G., Strela V.** Approximation by translate of refinable functions // Numer. Math. 1996. Vol. 73. P. 75-94.
8. Система автоматизированного проектирования автомобильных дорог. «ReCAD». Руководство по применению. Кн. 1–5. Томск, 2001. 428 с.
9. **Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н.** Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск: Наука, 1988. 102 с.
10. **Бойков В.Н., Шумилов Б.М.** Сплайны в трассировании автомобильных дорог. Томск: Изд-во ЦНТИ, 2001. 164 с.
11. **Де Бор К.** Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
12. **Wang W., Zhang Y.** Wavelets-based NURBS simplification and fairing // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2009, doi: 10.1016 / j.cma. 2009.04.003.
13. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
14. **Zhao G., Xu S., Li W., Teo O.-E.** Fast variation design of multiresolution curves and surfaces with B-spline wavelets // Comput. Aided Design. 2005. Vol. 37. P. 73-82.
15. **Шумилов Б.М., Эшаров Э.А.** Нестационарные сплайн-вейвлеты в ГИС и САПР линейно-протяженных пространственных объектов // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2006. № 1(12). С. 153-163.