Экспериментальный сравнительный анализ МКЭ и МКО для моделирования трехмерных гармонических электромагнитных полей*

С.Д. Бутюгин, А.В. Петухов
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Экспериментально исследуется и сравнивается эффективность различных численных аппроксимаций (методами конечных объемов (МКО) и конечных элементов (МКЭ)) для решения трехмерной краевой задачи электромагнетизма в частотной области. Полученные вещественные несимметричные и комплексные симметричные знаконеопределенные СЛАУ решались различными предобусловленными итерационными методами в подпространствах Крылова. Представлены результаты экспериментов для представительного набора модельных задач, демонстрирующие работу предложенных алгоритмов.

Постановка задачи

Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})e^{i\omega t}$, $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}})e^{i\omega t}$ с гармонической зависимостью от времени может быть преобразована к уравнению Гельмгольца [1, 2]

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \vec{\mathbf{E}} - k_0^2 \dot{\varepsilon}_r \vec{\mathbf{E}} = 0, \qquad (1)$$

при $\vec{J} = 0$ и $\rho = 0$, где $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_r \varepsilon_0 - i\sigma^e/\omega$, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Решение ищется в трехмерной области Ω с границей $\Gamma = S_0 \bigcup S_1$. Задаются граничные условия на $S_0 : \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}_0$ – условие волнового входа и на $S_1 : \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$ – условие металлической стенки. Здесь и далее под $\vec{\mathbf{n}}$ понимается вектор внешней нормали относительно грани. Условия согласования на внутренних границах описываются следующими уравнениями:

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \left(\dot{\varepsilon}_1 \vec{\mathbf{E}}_1 - \dot{\varepsilon}_2 \vec{\mathbf{E}}_2\right) = 0, \quad \vec{\mathbf{n}} \times \left(\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2\right) = 0,$$
$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \left(\dot{\mu}_1 \vec{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mu}_2 \vec{\mathbf{H}}_2\right) = 0, \quad \vec{\mathbf{n}} \times \left(\vec{\mathbf{H}}_1 - \vec{\mathbf{H}}_2\right) = 0.$$

Дополнительно рассматривается задача для потенциалов

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00526) и ОМН РАН (проект 1.3.4).

$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{A}} + \nabla V$, $\vec{\mathbf{B}} = (i/\omega)\nabla \times \vec{\mathbf{A}}$ с краевым условием для V: $\Gamma : \nabla V = 0$, для $\vec{\mathbf{A}}$ берутся те же условия, что и для $\vec{\mathbf{E}}$.

Аппроксимация

Для аппроксимации МКО дополним граничные условия равенством $div\vec{\mathbf{E}} = 0$, уравнение (1) в подобластях с постоянными материальными параметрами приведем к виду

$$-\Delta\vec{\mathbf{E}} + \kappa\vec{\mathbf{E}} = 0, \quad \kappa = -\mu_r\dot{\varepsilon}_r k_0^2,$$

которое выводится для гладкого $\vec{\mathbf{E}}$ на основе операторного равенства $\nabla \times \nabla \times = -\Delta + graddiv$.

Более подробно о построении аппроксимации МКО описано в [3, 4], в которой более подробно описан барицентрический МКО в применении к уравнению Гельмгольца.

В случае аппроксимации МКЭ комплексное уравнение Гельмгольца (1) может быть переписано в вариационной постановке [5]: найти $\vec{E} \in H_\Gamma^{\mathrm{rot}}$, для которого выполнено

$$\int_\Omega \left[\mu_r^{-1}\left(\nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right)\cdot\left(\nabla \times \vec{\psi}\right) - k_0^2\dot{\varepsilon}_r\left(\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\psi}\right)\right]d\Omega = 0, \quad \forall\vec{\psi} \in H_0^{rot},$$

дискретный аналог которой в случае задачи для потенциалов выглядит следующим образом [5]:

$$\sum_i u_i^A \int_\Omega \left[\mu_r^{-1}\left(\nabla \times \vec{\psi}_i\right)\cdot\left(\nabla \times \vec{\psi}_j\right) - k_0^2\dot{\varepsilon}_r\left(\vec{\psi}_i\cdot\vec{\psi}_j\right)\right]d\Omega - \sum_i u_i^V k_0^2 \int_\Omega \dot{\varepsilon}_r\left(\nabla\varphi_i\cdot\vec{\psi}_j\right)d\Omega = 0,$$

$$-\sum_i u_i^A k_0^2 \int_\Omega \dot{\varepsilon}_r\left(\vec{\psi}_i\cdot\nabla\varphi_j\right)d\Omega - \sum_i u_i^V k_0^2 \int_\Omega \dot{\varepsilon}_r\left(\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_j\right)d\Omega = 0,$$

где φ_j – узловые базисные функции; ψ_j – реберные базисные функции тетраэдра первого порядка. Данные уравнения записываются для функций ψ_j и φ_j, равных 0 на Г, для остальных берутся уравнения

$$u_j^A = \left(\vec{\mathbf{E}}_0(\vec{x}_j)\cdot\vec{\tau}_j\right)\Big/\left(\vec{\psi}_j(\vec{x}_j)\cdot\vec{\tau}_j\right), \quad u_j^V = 0.$$

В обоих методах матрица системы уравнений может быть собрана на основе поэлементной технологии [3, 6].

Численные методы

Полученные системы уравнений решались при помощи широко известных методов сопряженных и бисопряженных направлений подпространств Крылова (CG, BiCG, BiCGStab), описанных в [7, 8] и предобусловленных методом неполной факторизации Айзенштата.

Тестовые задачи

В качестве тестовой задачи рассматривался волновод с линейными размерами: a = 72, b = 34, c =200. На грани z = 200 задавалось условие $S_0 : \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}_0$, на остальной части границы расчетной области задавалось условие $S_1 : \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$.

Во всех тестах полагается $\mu_r = 1$, $\vec{\mathbf{E}}_0 = \vec{\mathbf{e}}_y \sin(\pi x/a), \omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9$.

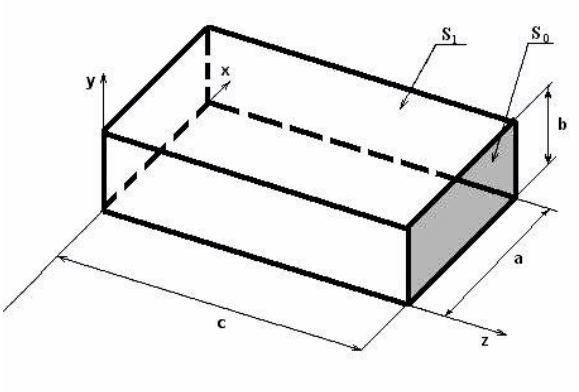


Рис. 1. Расчетная область для тестовых задач

Тест 1: $\varepsilon_r = 1$.

Тест 2: $\varepsilon_r = 2 - 0{,}1i$.

Тест 3: $\begin{cases} \varepsilon_r = 5, & 0 \le z \le c/2, \\ \varepsilon_r = 1, & c/2 \le z \le c. \end{cases}$

Расчетная область делилась на параллелепипеды, каждый из которых, в свою очередь, разбивался на 6 тетраэдров. Использовались следующие разбиения: 8×4×20, 14×6×40, 28×14×80, 58×28×160 по оси *x*, *y* и *z* соответственно.

Таблица 1. Тест №1

№	МКО			МКЭ		
	δE	n	t''	δE	n	t''
1	$1{,}5 \cdot 10^{0}$	19	<<1	$1{,}3 \cdot 10^{-1}$	57	0,5
2	$3{,}0 \cdot 10^{-1}$	28	0,1	$8{,}1 \cdot 10^{-2}$	110	11
3	$7{,}0 \cdot 10^{-2}$	45	2	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	217	220
4	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$	84	24	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	558	7800

Таблица 2. Тест №2

№	МКО			МКЭ		
	δE		t''	δE	n	t''
1	$1{,}7\cdot10^{-1}$	32	<<1	$1{,}4\cdot10^{-1}$	110	1
2	$4{,}7\cdot10^{-2}$	47	0,2	$7{,}8\cdot10^{-2}$	221	21
3	$1{,}2\cdot10^{-2}$	98	3,3	$3{,}5\cdot10^{-2}$	896	910
4	$2{,}8\cdot10^{-3}$	172	48	$1{,}7\cdot10^{-2}$	2203	13700

Таблица 3. Тест №3

№	МКО			МКЭ		
	δE	N	t''	δE	n	t''
1	$1{,}5\cdot10^{-0}$	95	<<1	$3{,}6\cdot10^{-1}$	245	0,8
2	$2{,}7\cdot10^{-1}$	125	0,3	$1{,}7\cdot10^{-1}$	509	19
3	$5{,}1\cdot10^{-2}$	207	7,1	$5{,}2\cdot10^{-2}$	1342	560
4	$1{,}2\cdot10^{-2}$	278	78	$2{,}4\cdot10^{-2}$	3234	12000

Критерием останова итерационного процесса служило условие $\left\|\vec{\mathbf{f}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{u}}_n\right\| < \varepsilon\left\|\vec{\mathbf{f}}\right\|$, $\varepsilon = 10^{-7}$. В табл. 1–3 приведена относительная ошибка δE полученных численных решений с аналитическими решениями, количество итераций n и время работы t в секундах для метода BiCGStab.

Выводы

Результаты тестов, представленные в таблицах, показывают сходимость методов на последовательности сгущающихся сеток с первым порядком для МКЭ и вторым порядком для МКО. Из табл. 1–3 видно, что МКО требует меньшее число итераций и меньше времени, что связано с лучшей обусловленностью матрицы системы.

Литература

1. **Григорьев А.Д., Янкевич В.Б.** Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. М.: Радио и связь, 1984.
2. **Bossavit A.** Computational Elactromagnetism. N.Y.: Academ Press, 1987.
3. **Ильин В.П.** Метод конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2001.

4. **Петухов А.В.** Решение трехмерного комплексного уравнения Гельмгольца методом барицентрических конечных объемов // Автометрия. 2007. Т. 43, №2. С. 112-123.
5. **Dyczij-Edlinger R., Biro O.** A joint and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite elements // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1996. Vol. 44, № 1 P. 15-23.
6. **Соловейчик Ю. Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.** Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
7. **Ильин В.П.** Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007.
8. **Saad Y.** Iterative Method for Sparse Linear Systems. N.Y.:PWS Pubblish., 1996.