ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ СПЛАЙНОВ

В.Н. Берцун

Томский государственный университет

Сплайны дают возможность гладкого восстановления сеточной функции и ее производных, упрощают визуализацию расчетов, используются для конструирования экономичных разностных схем решения многомерных краевых задач [1, 2].

Пусть на отрезке $[a,b]$ вещественной оси x задана сетка

$$\omega : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1,N}\,.$$

Функция *S(x)* является интерполяционным кубическим сплайном класса $C^2{}_{[a,\,b]}$ с узлами на сетке ω, если:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k^i (x - x_i)^k \ , x \in [x_i, x_{i+1}]\,, i = \overline{0, N-1}\ ;$$

$$S(x_i) = f_i\,, i = \overline{0,N}\ ;\ S(x) \in C^2[a,b]\,.$$

Для построения таких сплайнов необходимо задать два дополнительных условия. На равномерной сетке, если использовать условия отсутствия узла, систему уравнений для определения моментов можно записать в виде

$$\begin{gathered} -M_0 + 2M_1 - M_2 = 0\,, \\ M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6\Lambda f_i, \ \ i = \overline{1, N-1}\,. \\ -M_{N-2} + 2M_{N-1} - M_N = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Исключая из первых и последних двух уравнений этой системы соответственно M_0 и M_N, получим систему с трехдиагональной матрицей

$$\begin{gathered} M_1 = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2\,, M_{N-1} = (f_{N-2} - 2f_{N-1} + f_N)/h^2\,, \\ M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6\Lambda f_i, \ \ i = \overline{2, N-2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Моменты M_0, M_N определяются после решения системы (2)

$$M_0 = 2M_1 - M_2\,,\ M_N = 2M_{N-1} - M_{N-2}\,. \tag{3}$$

На каждом интервале для вычисления сплайна и его производных имеют место формулы

$$S(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} + \frac{t}{6}(1-t)h_{i+1}^2\left[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}\right],$$

$$S'(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}\left[(2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}\right], \tag{4}$$

$$S''(x) = (1-t)M_i + tM_{i+1}, \quad \text{где } t = \frac{x - x_i}{h_{i+1}},\ h_{i+1} = x_{i+1} - x_i,\ x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0, N-1}.$$

Построение кубических сплайнов через моменты на многопроцессорных вычислительных системах приводит к необходимости распараллеливания метода прогонки [3].

Пусть $N = Pq$, где P – число процессоров, в памяти которых размещены соответственно данные:

$x_0, x_1, \cdots, x_q, x_{q+1}$;

$x_{q-1}, x_q, \cdots, x_{2q}, x_{2q+1}$;

....

$x_{N-q-1}, x_{N-q}, \cdots, x_{N-1}, x_{N.}$

Такое расположение данных соответствует декомпозиции области ω с перекрытием на шаг сетки, фрагмент которой изображен на рис. 1.

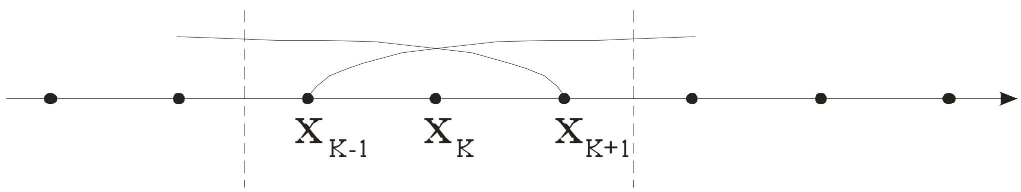

Рис. 1

Процесс построения сплайна в этом случае состоит из трех этапов:

1. Распределение исходных данных в каждом процессоре в соответствии с декомпозицией сетки ω.

2. Вычисление моментов на границах интервала декомпозиции области

$M_k = (f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1})/h^2$,

$M_{k+q} = (f_{k+q-1} - 2f_{k+q} + f_{k+q+1})/h^2$,

$k = 1, q, 2q, 3q, \cdots, (P-1)q - 1.$

3. Решение методом прогонки в каждом процессоре трехдиагональной системы для моментов. Определение по формулам (3) моментов M_0 и M_N.

В этом случае погрешность в определении моментов $O(h^2)$, а для их вычисления потребуется $8q + 1$ операций на P процессорах. В рассматриваемом алгоритме массив первых прогоночных коэффициентов одинаков для всех процессоров. Поэтому при достаточно больших $q = KL$ в каждом процессоре, содержащем $KL + 2$ точек, вводится разбиение на K перекрывающихся подынтервалов. Для первой группы из L точек в каждом процессоре расчеты осуществляются с одновременным определением двух массивов прогоночных коэффициентов. Для всех последующих $(k-1)$ групп в прямой прогонке пересчитывается только второй прогоночный коэффициент.

Тогда в каждом процессоре на вычисления будет затрачено $(8L+1)+(K-1)(5L+3)$ операций. Для вычислений по формулам (4) при заданном x в каждом процессоре предварительно проверяется выполнение условия $x \in [x_{KLi}, x_{KL(i+1)}]$, $i = 0,1,...,P-1$. После определения номера процессора, содержащего необходимый интервал и исходные данные, осуществляются вычисления по формулам (2). В рассмотренном алгоритме условие отсутствия узла выполняется только на первых и последних двух интервалах сетки ω.

Отметим, что если при вычислении интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить кубическим сплайном $S(x)$, то

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1}(f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{24}\sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1}^3(M_i + M_{i+1}). \qquad (5)$$

Тогда для вычисления интеграла через моменты на P процессорах получим

$$I = \sum_{i=0}^{P-1} \int\limits_{A_i}^{B_i} S(x)dx,\ A_i = x_{KLi}.\ B_i = x_{KL(i+1)}.$$

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
2. Берцун В. Н. Сплайны сеточных функций. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 124 с.
3. Вшивков В.А. О распараллеливании вычислительных алгоритмов // Сибирская школа-семинар по параллельным вычислениям. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – С. 46–59.