Метод регуляризации решения обратных задач теплопроводности

О. А. Есаулова, Н. Н. Меркулова
Томский государственный университет, Томск

Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям начальных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректно поставленных задач [1].

Целый класс некорректных задач составляют так называемые обратные задачи, возникающие в тех случаях, когда необходимые данные для постановки прямой корректной задачи отсутствуют, но зато есть некоторая дополнительная информация о решении, позволяющая формулировать обратную задачу. К числу таких задач принадлежат обратные задачи теплопроводности (ОЗТ) [2].

При рассмотрении обратных задач теплообмена естественно выделить ретроспективную обратную задачу теплопроводности, граничные обратные задачи и коэффициентные обратные задачи.

Целью данной работы является применение метода регуляризации к решению некорректных ОЗТ, а также разработка алгоритма решения таких задач .

Рассмотрим пример, представляющий собой случай некорректной граничной обратной задачи теплопроводности. Пусть процесс теплопроводности в пластине описывается уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ x \in (0,1),\ t \in (0,1) \qquad (1)$$

Известно начальное распределение температуры

$$T(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,1]$$

В точке $x = d\ (0 < d \le 1)$ задано изменение температуры во времени

$$T(d,t) = \psi(t),\ t \in [0,1]$$

На правой границе $x = 1$ известно условие второго рода

$$-\lambda\frac{\partial T(1,t)}{\partial x}=\Gamma_1(t),\ t\in[0,1]$$

где $\lambda=\text{const}>0$.

Требуется определить плотность теплового потока на левой границе $\Gamma_2(t)=-\lambda\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x}$.

Пусть $T(x,t)=e^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}Sin(nx)$. Тогда начальные и граничные условия примут вид:

$$T(x,0)=e^{-\sqrt{n}}Sin(nx),\ x\in[0,1];$$

$$T(d,t)=e^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}Sin(nd),\ t\in[0,1],\ 0<d\le 1;$$

$$-\lambda\frac{\partial T(1,t)}{\partial x}=-\lambda ne^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}Cos(n),\ t\in[0,1]$$

Следовательно, $\varphi(x)=e^{-\sqrt{n}}Sin(nx), x\in[0,1]$,

$\psi(t)=e^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}Sin(nd),\ t\in[0,1],\ \Gamma_1(t)=-\lambda ne^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}Cos(n),\ t\in[0,1]$, $0<d\le 1$ и требуется найти численным методом значение потока на левой границе $\Gamma_2(t)$. Очевидно, что точное решение определяется как $\Gamma_2(t)=\lambda ne^{-\sqrt{n}}e^{-n^2t}Cos(n)$.

Имеем следующую расчетную область (рис. 1).

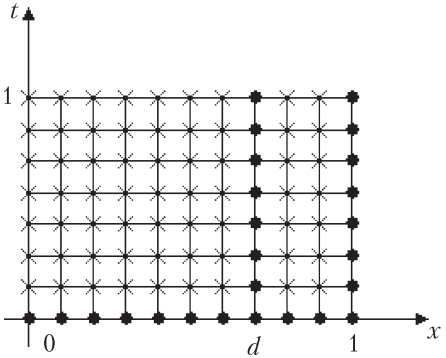


Рис. 1. Расчетная сеточная область

Предположим, что есть алгоритм решения соответствующей прямой задачи и найдем его «обращение» с целью установления искомой связи между входными данными и граничными условиями [3].

Решение прямой задачи для уравнения (1), согласно принципам суперпозиции и Дюамеля [4], можно представить в виде:

$$T(x,t)=\int_0^t \Gamma_2(\xi)\frac{\partial\theta(x,t-\xi)}{\partial t}d\xi+\int_0^t \Gamma_1(\xi)\frac{\partial\theta(1-x,t-\xi)}{\partial t}d\xi, \qquad (2)$$

где $\theta(x,t)$ — температурная реакция тела на единичный тепловой поток на одной из границ ($x=0$) при условии теплоизолированности другой ($x=1$).

Величина $\theta(x,t)$ может быть рассчитана по формуле [3]:

$$\theta(x,t)=\frac{1}{\lambda}\left[t+\frac{3(1-x)^2-1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\exp\left(-k^2\pi^2t\right)\cos k\pi(1-x)\right].$$

Таким образом, обратная задача в данном случае сводится к следующей интегральной задаче:

$$Au\equiv\int_0^t u(\xi)K(t-\xi)d\xi=f(t),\ t\in[0,1], \qquad (3)$$

где $u(t)=\Gamma_2(t)$, $K(t-\xi)=\dfrac{\partial\theta(d,t-\xi)}{\partial t}$,

$$f(t)=\psi(t)-\int_0^t \Gamma_1(\xi)\frac{\partial\theta(1-d,t-\xi)}{\partial t}d\xi.$$

Найдя производную от функции $\theta(x,t)$ по времени, получим представление ядра и правой части из уравнения (3):

$$K(t-\xi)=\frac{\partial\theta(d,t-\xi)}{\partial t}=\frac{1}{\lambda}\left[1-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-k^2\pi^2(t-\xi)}\cos k\pi(1-d)\right], \qquad (4)$$

$$f(t)=\psi(t)-\frac{1}{\lambda}\int_0^t \Gamma_1(\xi)\left[1-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-k^2\pi^2(t-\xi)}Cosk\pi d\right]d\xi.$$

Для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами граничные обратные задачи имеют общее интегральное представление (2). Разделим полный временной отрезок на конечное число интервалов с переменными шагами с целью замены уравнения (3) приближенным дискретным аналогом: $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, $k=\overline{1,m}$ [3]. В этом случае уравнение (3) перепишется в виде [4]:

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} u(\xi)K(t_k-\xi)d\xi = f(t_k),\ k=\overline{1,m}. \qquad (5)$$

Полагая искомую функцию $u(t)$ равной постоянному значению $\hat{u}_k$ на каждом интервале, введем ее ступенчатую аппроксимацию:

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{u}_k\Delta\theta_{ik} = f_k,\ k=\overline{1,m}, \qquad (6)$$

где $f_k = f(t_k)$, $\Delta\theta_{ik} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_k-\xi)d\xi$.

После аппроксимации получим систему линейных алгебраических уравнений $A_\Delta u = f$, $u = \{\hat{u}_k\}_1^m$, $f = \{f_k\}_1^m$ с нижней треугольной матрицей.

Определитель матрицы A_Δ равен произведению ее диагональных элементов: $\det A_\Delta = \Delta\theta_{11}\Delta\theta_{22}\ldots\Delta\theta_{mm}$. Из физического смысла величины $\theta(d,t)$ следует, что все $\Delta\theta_{ik} > 0$. Отсюда $\det A_\Delta \neq 0$. Следовательно, матрица A_Δ теоретически является невырожденной и существует обратная матрица A_Δ^{-1}. Легко получить следующую рекуррентную формулу, позволяющую шаг за шагом найти все компоненты m-мерного вектора u [3]:

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\Delta\theta_0}\left(f_k - \sum_{i=1}^{k-1}\hat{u}_i\Delta\theta_{k-i}\right),\ k=\overline{1,m} \qquad (7)$$

Следовательно, вместо $\frac{m(m+1)}{2}$ коэффициентов матрицы необходимо рассчитывать и хранить в памяти компьютера всего m коэффициентов.

Решение уравнения (3) было найдено с использованием формул (7) при разных значениях m и, как показало сравнение, вело себя неустойчиво. Для решения данной некорректной задачи использовалась регуляризация Тихонова [1].

Процесс регуляризации решения состоит из трех основных этапов:

- найти регуляризирующий оператор $R(f,\alpha)$;
- задать параметр регуляризации α (по дополнительной информации о задаче);
- найти регуляризованное решение $u_\alpha = R(f_\alpha,\alpha)$.

Таким образом, вместо операторного уравнения $Au = f$ будем решать регуляризованную систему линейных алгебраических уравнений [1]:

$$\alpha u_k^{\alpha} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a}_{kj} u_j^{\alpha} = b_k, k = 1,2,...,m. \tag{8}$$

Коэффициенты системы и правая часть вычисляются по формулам:

$$\overline{a}_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}, \; b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i.$$

В теории методов приближенного решения некорректных задач вопросу выбора параметра регуляризации уделяется значительное внимание. Среди ряда алгоритмов, позволяющих подобрать параметр регуляризации так, чтобы минимизировать норму невязки, наиболее известным является априорный выбор параметра регуляризации α.

Априорный выбор параметра регуляризации α

Невязка зависит некоторым образом от выбора α [2]. Обозначим $\varphi(\alpha) = \|Au_{\alpha} - f_{\delta}\|$. Тогда нахождение параметра регуляризации состоит в соответствии с принципом невязки в решении уравнения

$$\varphi(\alpha) = \delta. \tag{9}$$

Для приближенного решения уравнения (9) используются различные вычислительные процедуры. Например, задается последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k \tag{10}$$

и вычисления проводятся с $k = 0$ до некоторого $k = K$, при котором равенство (9) выполняется с приемлемой точностью.

Таким образом, алгоритм метода регуляризации в применении к тестовому примеру состоит в следующем:

1) вычисляем параметр регуляризации, пользуясь формулой (10), в которой положим $\alpha_0 = 1$ и $q = 0{,}99$;

2) составляем матрицу регуляризованной системы линейных алгебраических уравнений (8) и столбец свободных членов с найденным α_k.

3) решаем полученную регуляризованную систему линейных алгебраических уравнений $A_R u^{\alpha} = b$ методом Гаусса с выбором главного элемента и получаем u^{α_k};

4) находим невязку $\varphi(\alpha) = \|Au_{\alpha} - f_{\delta}\|$, где A — первоначальная матрица. Если $\varphi(\alpha) = \delta$, то процесс окончен и u_{α_k} – найденное решение с заданной точностью. Если же $\varphi(\alpha) \neq \delta$, то подбираем следующее α_k.

Апостериорный выбор параметра регуляризации α

На практике, как правило, значения функции $u(t)$ снимаются с показаний приборов и, следовательно, известны с погрешностью. Будем считать, что вместо значений функции $f(t_i)$ известны значения $f_{\delta}(t_i)$, определяемые формулой:

$$f_{\delta}(t_i) = f(t_i)\left(1 + \gamma_i \sqrt{\frac{3(b-a)}{b^3 - a^3}}\sigma\right)$$

Здесь γ_i — случайные числа из промежутка [0;1] с равномерным законом распределения, σ — коэффициент запаса и выбирается как $\sigma = 0{,}002$. Таким образом, имеем систему линейных уравнений, полученную по описанному выше алгоритму метода регуляризации:

$$A_R u^{\alpha} = b. \tag{11}$$

Параметр регуляризации α должен подбираться так, чтобы принимаемое за решение задачи (11) регуляризованное решение $y\alpha$ было, по возможности, наилучшим в смысле удачного согласования левой и правой частей уравнения $\tilde{A}y = f_{\delta}$, что определяется малостью невязки. Таким образом, основной проблемой метода регуляризации является вопрос подбора параметра регуляризации α [5].

Так, согласно [5], зависимость величин α и δ, представляемая в виде $\alpha = \delta^p$, является регуляризирующим алгоритмом при условии, что $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Поскольку на практике неизвестно, какой случай выбора показатель степени p имеет место, то можно в качестве значения $\alpha(\delta)$ выбирать любую зависимость, сохраняющую условие согласования нормы невязки и погрешности правой части:

$$\|Au_{\alpha} - f\| \leq \|f - f_{\delta}\|$$

Выбор параметра регуляризации α методом секущих

Для приближенного решения уравнения (9) можно использовать и более быстро сходящиеся итерационные методы. Установлено, что функция $\tilde{\varphi}(\beta) = \varphi\left(1/\beta\right)$ является убывающей и выпуклой функцией. Поэтому для решения уравнения $\tilde{\varphi}(\beta) = \delta$ можно применить итерационный метод Ньютона, когда

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\tilde{\varphi}(\beta_k)}{\tilde{\varphi}'(\beta_k)}$$

Этот метод будет сходиться при любом начальном приближении $\beta_0 > 0$. Для того, чтобы не вычислять производную функции $\tilde{\varphi}(\beta)$, можно использовать итерационный метод секущих, в котором:

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{\tilde{\varphi}(\beta_k) - \tilde{\varphi}(\beta_{k-1})}\tilde{\varphi}(\beta_k)$$

Применение подобных итерационных процедур позволяет сократить общие вычислительные затраты на определение параметра регуляризации α.

Оценивая реализованные схемы, можно отметить в отдельности особенности каждой. Вычисления регуляризованного решения с использованием априорного выбора параметра регуляризации дало результаты достаточно близкие по своему характеру к точному решению, но в то же время реализация этого метода требует большого объема используемой оперативной памяти, что не позволяет проводить численный эксперимент для числа разбиений $m > 20$, и уже начиная с $m > 10$ расчеты требуют много времени и метод становится неэффективным. В этом смысле использование алгоритма апостериорного выбора параметра регуляризации позволяет проводить расчеты при большом числе разбиений $m (m > 20)$ и дает более приемлемые результаты. Однако можно утверждать, что ошибка вычислений уменьшается еще больше в случае применения итерационного метода секущих за счет более оптимального выбора параметра регуляризации. Более того, по сравнению с алгоритмом априорного выбора параметра регуляризации α, который сходится медленно (более 300 итераций), метод секущих имеет высокую скорость сходимости (2 итерации), что обусловлено уменьшением числа выпол-

няемых арифметических операций. На рис. 2 показан характер поведения регуляризованного решения, полученного методом секущих.

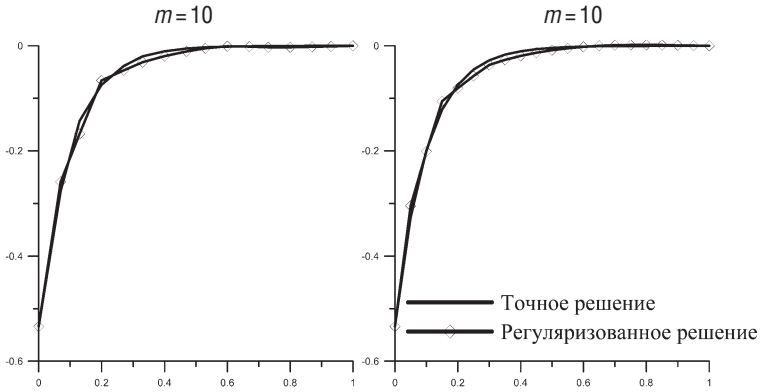


Рис. 2. Характер поведения точного и регуляризованного решений, полученных методом секущих

Литература

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 288 с.

2. **Самарский А. А., Вабищевич П. Н.** Вычислительная теплопередача. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.

3. **Алифанов О. М., Вабищевич П. Н., Михайлов В. В. и др.** Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем. — М. : Логос, 2001. — 400 с.

4. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 735 с.

5. **Верлань А. Ф., Сизиков В. С.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев : Наукова Думка, 1986.