

Полинейный рекуррентный метод решения СЛАУ с пятидиагональной матрицей

А. А. Фомина, Л. Н. Фомина

Кемеровский государственный университет, Кемерово

Современные методы решения краевых задач, связанных с исследованием явлений гидродинамики и теплопереноса, сводятся, как правило, к разностной аппроксимации многомерных дифференциальных уравнений, что, в свою очередь, приводит к построению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица которой имеет большую размерность и разреженно-упорядоченную структуру [1]. Данная работа посвящена изложению итерационного экономичного устойчивого к ошибкам округления метода, отличительной особенностью которого является одномоментный учет граничных условий при построении очередного приближения численного решения во всей области постановки задачи.

Рассматривается двумерная прямоугольная область (рис. 1) $\Omega = \{(x, y) \in \Omega, 0 \leq x \leq xL, 0 \leq y \leq yL\}$ с границей

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial\Omega : x = 0, 0 \leq y \leq yL; \\ x = xL, 0 \leq y \leq yL, y = 0, 0 \leq x \leq xL; y = yL, 0 \leq x \leq xL. \end{array} \right\}$$

Внутри области стационарное поведение искомой функции Φ описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = S \quad (1)$$

а на границе Γ – граничными условиями 1-го рода $\Phi = \Phi_\Gamma$. Здесь v_x, v_y – коэффициенты диффузии, S – источниковый член порождения Φ .

Аппроксимация (1) выполняется методом контрольного объема, хотя принципиального значения конкретный способ дискретизации (1) не имеет, лишь бы были выполнены четыре основных правила построения разностных схем, обеспечивающих, в частности, диагональное преобладание матрицы СЛАУ [2].

Разностное уравнение имеет вид:

$$a_{P_{ij}} \Phi_{ij} = a_{E_{ij}} \Phi_{i+1j} + a_{W_{ij}} \Phi_{i-1j} + a_{N_{ij}} \Phi_{ij+1} + a_{S_{ij}} \Phi_{ij-1} + b_{ij} \quad (2)$$

$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, причем $a_p = a_E + a_W + a_N + a_S$. Здесь i, j — индексы, а n, m — количество узлов сеточного разбиения расчетной области по координатам x, y соответственно. Разностный шаблон и соответствующее обозначение узлов представлены на рис. 2.

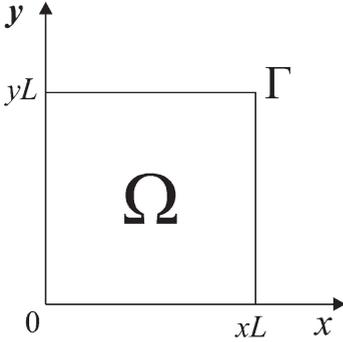


Рис. 1

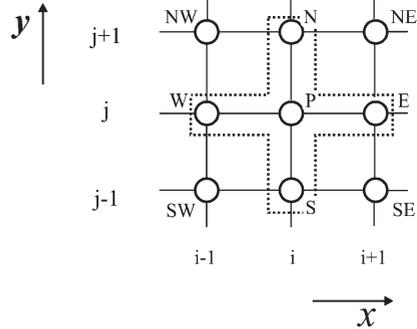


Рис. 2

Расчетная процедура на каждой итерации состоит из двух этапов: сначала находится промежуточное решение путем проведения вычислений по линиям $x = x_i$; (в начале i меняется от 1 до n — прямой ход, затем i меняется от n до 1 — обратный ход), при этом на каждой линии пробегаются узлы сетки от $j = 1$ до $j = m$ и обратно; затем находится окончательное решение итерации путем повторения алгоритма, но уже по линиям $y = y_j$.

Последовательность вычислений вдоль координаты x при построении вектора промежуточного решения $\{\Phi_{ij}^{05}\}$ состоит из следующих шагов (λ — рабочая переменная).

1. Прямой ход — возрастание индекса i от 1 до n .

1. $i = 1$:

$$j = 1: \quad \bar{a}_{P_{11}} = \alpha_{P_{11}}; \bar{a}_{E_{11}} = \alpha_{E_{11}}; \bar{a}_{N_{11}} = \alpha_{N_{11}}; \bar{b}_{11} = b_{11}$$

$$j = \overline{2, m-1}: \quad \bar{a}_{P_{1j}} = \alpha_{P_{1j}}; \bar{a}_{E_{1j}} = \alpha_{E_{1j}}; \bar{a}_{S_{1j}} = \alpha_{S_{1j}}; \bar{a}_{N_{1j}} = \alpha_{N_{1j}}; \bar{b}_{1j} = b_{1j}$$

$$j = m: \quad \bar{a}_{P_{1m}} = \alpha_{P_{1m}}; \bar{a}_{E_{1m}} = \alpha_{E_{1m}}; \bar{a}_{S_{1m}} = \alpha_{S_{1m}}; \bar{b}_{1m} = b_{1m}$$

2. $i = \overline{1, n-1}$:

2а. Вычисление α_{nb}, β

$$j=2: \quad \lambda = \frac{\bar{a}_{S_{i2}}}{\alpha_{P_{i1}}} ; \alpha_{P_{i2}} = \bar{a}_{P_{i2}} - \lambda \bar{a}_{N_{i1}} ; \alpha_{N_{i2}} = \bar{a}_{N_{i2}} ; \alpha_{E_{i2}} = \bar{a}_{E_{i2}}$$

$$\bar{\alpha}_{SE_{i2}} = \lambda \bar{a}_{E_{i1}} ; \alpha_{NE_{i2}} = 0 ; \beta_{i2} = \lambda \bar{b}_{i1} + \bar{b}_{i2}.$$

$$j = \overline{3, m-1}: \quad \lambda = \frac{\bar{a}_{S_{ij}}}{\alpha_{P_{j-1}}} ;$$

$$\alpha_{P_{ij}} = \bar{a}_{P_{ij}} - \lambda \alpha_{N_{ij-1}} ; \alpha_{N_{ij}} = \bar{a}_{N_{ij}} ;$$

$$\alpha_{E_{ij}} = \bar{a}_{E_{ij}} + \lambda (\alpha_{NE_{ij-1}} - 3\theta \bar{a}_{SE_{ij-1}}) ;$$

$$\alpha_{NE_{ij}} = \theta \lambda \alpha_{SE_{ij-1}} ; \alpha_{SE_{ij}} = \lambda (\alpha_{E_{ij-1}} + 3\theta \bar{a}_{SE_{ij-1}}) ;$$

$$\beta_{ij} = b_{ij} + \lambda \left\{ \beta_{ij-1} + \alpha_{SE_{ij-1}} \left[\Phi_{i+1j-2}^{k-1} - \theta (3(\Phi_{i+1j-1}^{k-1} - \Phi_{i+1j}^{k-1}) + \Phi_{i+1j+1}^{k-1}) \right] \right\} ;$$

$$j=m: \quad \lambda = \frac{\bar{a}_{S_{im}}}{\alpha_{P_{m-1}}} ; \alpha_{P_{im}} = \bar{a}_{P_{im}} - \lambda \bar{a}_{N_{im-1}} ;$$

$$\alpha_{E_{im}} = \bar{a}_{E_{im}} + \lambda (\alpha_{NE_{im-1}} - \theta \bar{a}_{SE_{im-1}}) ; \alpha_{SE_{im}} = \lambda (\alpha_{E_{im-1}} + 2\theta \bar{a}_{SE_{im-1}}) ;$$

$$\beta_{im} = b_{im} + \lambda \left\{ \beta_{im-1} + \alpha_{SE_{im-1}} \left[\Phi_{i+1m-2}^{k-1} - \theta (2\Phi_{i+1m-1}^{k-1} - \Phi_{i+1m}^{k-1}) \right] \right\}.$$

2б. Вычисление γ_{nb}, δ

$$j=m-1: \quad \lambda = \frac{\bar{a}_{N_{im-1}}}{\alpha_{P_{im}}} ; \gamma_{P_{im-1}} = \bar{a}_{P_{im-1}} - \lambda \bar{a}_{S_{im}} ;$$

$$\gamma_{E_{im-1}} = \bar{a}_{E_{im-1}} ; \gamma_{S_{im-1}} = \bar{a}_{S_{im-1}} ;$$

$$\gamma_{NE_{im-1}} = \lambda \bar{a}_{E_{im}} ; \gamma_{SE_{im-1}} = 0 ; \delta_{im-1} = \bar{b}_{im-1} + \lambda \bar{b}_{im}.$$

$$j = \overline{m-2, 2} \quad \lambda = \frac{\bar{a}_{N_{ij}}}{\gamma_{P_{j+1}}} ; \gamma_{P_{ij}} = \bar{a}_{P_{ij}} - \lambda \gamma_{S_{j+1}} ; \gamma_{S_{ij}} = \bar{a}_{S_{ij}} ;$$

$$\gamma_{E_{ij}} = \bar{a}_{E_{ij}} + \lambda (\gamma_{SE_{ij+1}} - 3\theta \bar{a}_{NE_{ij+1}}) ; \gamma_{SE_{ij}} = \theta \lambda \gamma_{NE_{ij+1}} ;$$

$$\gamma_{NE_{ij}} = \lambda (\gamma_{E_{ij+1}} + 3\theta \gamma_{NE_{ij+1}}) ;$$

$$\delta_{ij} = \bar{b}_{ij} + \lambda \left\{ \delta_{ij+1} + \gamma_{NE_{ij+1}} \left[\Phi_{i+1j+2}^{k-1} - \theta (3(\Phi_{i+1j+1}^{k-1} - \Phi_{i+1j}^{k-1}) + \Phi_{i+1j-1}^{k-1}) \right] \right\}.$$

$$\begin{aligned}
j=1: \quad \lambda &= \frac{\bar{a}_{N_{i1}}}{\gamma_{P_{i2}}} ; \\
\gamma_{P_{i1}} &= \bar{a}_{P_{i1}} - \lambda \gamma_{S_{i2}} ; \gamma_{E_{i1}} = \bar{a}_{E_{i1}} + \lambda \left(\gamma_{SE_{i2}} - \theta \bar{a}_{NE_{i2}} \right) ; \\
\gamma_{NE_{i1}} &= \lambda \left(\gamma_{E_{i2}} + 2\theta \gamma_{NE_{i2}} \right) ; \\
\delta_{i1} &= \bar{b}_{i1} + \lambda \left\{ \delta_{i2} + \gamma_{NE_{i2}} \left[\Phi_{i+13}^{k-1} - \theta \left(\Phi_{i+12}^{k-1} - \Phi_{i+11}^{k-1} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

2с. Вычисление p_{nb} , q

$$\begin{aligned}
j=1: \quad p_{P_{i1}} &= \gamma_{P_{i1}} ; p_{E_{i1}} = \gamma_{E_{i1}} ; p_{NE_{1j}} = \gamma_{NE_{i1}} ; q_{i1} = \delta_{i1} ; \\
j = \overline{2, m-1} \quad p_{P_{ij}} &= \alpha_{P_{ij}} + \gamma_{P_{ij}} - \bar{a}_{P_{ij}} ; p_{E_{ij}} = \alpha_{E_{ij}} + \gamma_{E_{ij}} - \bar{a}_{E_{ij}} ; \\
p_{SE_{ij}} &= \alpha_{SE_{ij}} + \gamma_{SE_{ij}} ; p_{NE_{ij}} = \alpha_{NE_{ij}} + \gamma_{NE_{ij}} ; q_{ij} = \beta_{ij} + \delta_{ij} - \bar{b}_{ij} ; \\
j=m: \quad p_{P_{im}} &= \alpha_{P_{im}} ; p_{E_{im-1}} = \alpha_{E_{im}} ; p_{SE_{1m}} = \alpha_{SE_{im}} ; q_{im} = \beta_{im} .
\end{aligned}$$

2д. Вычисление \bar{b} , \bar{a}_{nb}

$$\begin{aligned}
j = \overline{1, m} : \quad \bar{b}_{i+1j} &= b_{i+1j} + a_{W_{i+1j}} q_{ij} / p_{P_{ij}} ; \\
\bar{a}_{E_{i+1j}} &= a_{E_{i+1j}} \quad \text{при условии } i < n-1 \\
j=1: \quad \bar{a}_{P_{i+11}} &= a_{P_{i+11}} - a_{W_{i+11}} p_{E_{i1}} / p_{P_{i1}} ; \\
\bar{a}_{N_{i+11}} &= a_{N_{i+11}} + a_{W_{i+11}} p_{NE_{i1}} / p_{P_{i1}} ; \\
j = \overline{2, m-1} \quad \bar{a}_{P_{i+1j}} &= a_{P_{i+1j}} - a_{W_{i+1j}} p_{E_{ij}} / p_{P_{ij}} ; \\
\bar{a}_{S_{i+1j}} &= a_{S_{i+1j}} + a_{W_{i+1j}} p_{SE_{ij}} / p_{P_{ij}} ; \\
\bar{a}_{N_{i+1j}} &= a_{N_{i+1j}} + a_{W_{i+1j}} p_{NE_{ij}} / p_{P_{ij}} ; \\
j=m: \quad \bar{a}_{P_{i+1m}} &= a_{P_{i+1m}} - a_{W_{i+1m}} p_{E_{im}} / p_{P_{im}} ; \\
\bar{a}_{S_{i+1m}} &= a_{S_{i+1m}} + a_{W_{i+1m}} p_{SE_{im}} / p_{P_{im}} .
\end{aligned}$$

II. Обратный ход — убывание индекса i от n до 1.

1. Вычисление промежуточного решения при $i = n$.

1а. Прямой ход по j .

$$j=1: \quad \varphi_{n1} = \frac{\bar{a}_{N_{n1}}}{\bar{a}_{P_{n1}}}; \quad \kappa_{n1} = \frac{\bar{b}_{n1}}{\bar{a}_{P_{n1}}};$$

$$j = \overline{2, m-1} \quad \varphi_{nj} = \frac{\bar{a}_{N_{nj}}}{\left(\bar{a}_{P_{nj}} - \varphi_{nj-1} \bar{a}_{S_{nj}}\right)};$$

$$\kappa_{nj} = \frac{\left(\bar{b}_{nj} + \kappa_{nj-1} \bar{a}_{S_{nj}}\right)}{\left(\bar{a}_{P_{nj}} - \varphi_{nj-1} \bar{a}_{S_{nj}}\right)}.$$

1b. Обратный ход по j .

$$j=m: \quad \Phi_{nm}^{05} = \frac{\left(\bar{b}_{nm} + \kappa_{nm-1} \bar{a}_{S_{nm}}\right)}{\left(\bar{a}_{P_{nm}} - \varphi_{nm-1} \bar{a}_{S_{nm}}\right)};$$

$$j = \overline{m-1, 1} \quad \Phi_{nj}^{05} = \varphi_{nj} \Phi_{nj+1}^{05} + \kappa_{nj}.$$

2. Вычисление промежуточного решения при $i = \overline{n-1, 1}$:

2a. Прямой ход по j .

$$j=1: \quad \varphi_{i1} = \frac{\bar{a}_{N_{i1}}}{\bar{a}_{P_{i1}}}; \quad \kappa_{i1} = \frac{\left(\bar{b}_{i1} + \bar{a}_{E_{i1}} \Phi_{i+11}^{05}\right)}{\bar{a}_{P_{i1}}};$$

$$j = \overline{2, m-1} \quad \varphi_{ij} = \frac{\bar{a}_{N_{ij}}}{\left(\bar{a}_{P_{ij}} - \varphi_{ij-1} \bar{a}_{S_{ij}}\right)};$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\left(\bar{b}_{ij} + \kappa_{ij-1} \bar{a}_{S_{ij}} + \bar{a}_{E_{ij}} \Phi_{i+1j}^{05}\right)}{\left(\bar{a}_{P_{ij}} - \varphi_{ij-1} \bar{a}_{S_{ij}}\right)}.$$

2b. Обратный ход по j .

$$j=m: \quad \Phi_{im}^{05} = \frac{\left(\bar{b}_{im} + \kappa_{im-1} \bar{a}_{S_{im}} + \bar{a}_{E_{im}} \Phi_{i+1m}^{05}\right)}{\left(\bar{a}_{P_{im}} - \varphi_{im-1} \bar{a}_{S_{im}}\right)};$$

$$j = \overline{m-1, 1} \quad \Phi_{ij}^{05} = \varphi_{ij} \Phi_{ij+1}^{05} + \kappa_{ij}.$$

Окончательное значение вектора решения на k -ой итерации $\{\Phi_{ij}^k\}$ получается путем повтора приведенной выше процедуры вычислений вдоль линий $y = y_j$, в которой в качестве решения с предыдущей итерации принимается вектор $\{\Phi_{ij}^{05}\}$.

Сходимость решения определяется по значению отношения норм векторов невязок $\frac{\|R^k\|}{\|R^0\|}$, где:

$$\|R^k\| = \left\{ \frac{1}{(xL, yL)} \sum_{ij} h_x h_y \left[a_{E_{ij}} \Phi_{ij}^k - \left(-a_{E_{ij}} \Phi_{i+1, j}^k + a_{W_{ij}} \Phi_{i-1, j}^k + a_{N_{ij}} \Phi_{ij+1}^k + a_{S_{ij}} \Phi_{ij-1}^k + b_{ij} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Здесь h_x, h_y – сеточные шаги по координатам x и y соответственно. Решение считается найденным, если $\frac{\|R^k\|}{\|R^0\|} < \varepsilon$, где ε – заданная точность решения.

Для апробации метода выбрана следующая краевая задача: в области $\Omega = \{(x, y) \in \Omega, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ выполняется уравнение (1), при этом коэффициенты v_x и v_y определяются как

$$\begin{aligned} v_x &= 1 + C_2 \left[(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 \right], \\ v_y &= 1 + 2 \left[0,5 - (x - 0,5)^2 - (y - 0,5)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение задачи определено в виде пробной функции

$$u(x, y) = 256 \left[xy(1-x)(1-y) \right]^2, \quad (5)$$

откуда легко получить выражения для Φ_Γ при задании граничных условий первого рода. Подстановка (4) и (5) в (1) позволяет получить аналитическое выражение для источника S .

Разностная аппроксимация задачи проведена на равномерной разностной сетке $\Omega_h = \left\{ \begin{aligned} &(x_i, y_j) : x_i = (i-1)h_x, y_j = (j-1)h_y; \\ &1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m; h_x = \frac{1}{(n-1)}, h_y = \frac{1}{(m-1)}. \end{aligned} \right\}$.

Начальное приближение решения выбрано постоянное по всей области $\Phi_{ij}^0 = 1$.

Чтобы показать насколько эффективен предложенный метод, проводились тестовые расчеты одной и той же задачи, с двойной

точностью представления чисел при предельно высоком требовании к точности решения для следующих методов: верхней релаксации [1], полинейного [3], модифицированного полинейного [4] с постоянным итерационным параметром, компенсационным параметром [5] и полинейного рекуррентного. Расчеты проводились для каждого метода при оптимальных значениях итерационного параметра, которые подбирались для каждого метода и каждой сетки экспериментально.

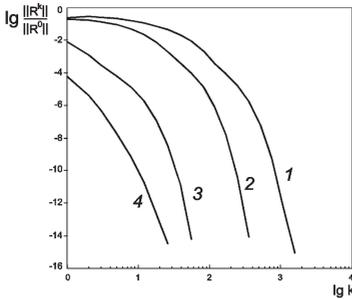


Рис. 3

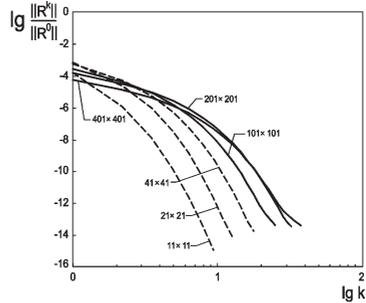


Рис. 4

На рис. 3 приведен график отношения норм невязок в зависимости от количества итераций для методов: 1 — верхней релаксации, 2 — полинейного, 3 — модифицированного полинейного с постоянным итерационным параметром (MP), 4 — полинейного рекуррентного (R2), на сетке 101×101 . Из поведения кривых видна высокая эффективность полинейного рекуррентного метода, который достигает заданной точности решения за наименьшее количество итераций, снижая при этом за первую итерацию норму невязки на 4×5 порядков.

Зависимости отношений норм невязок от номера итерации при различных сеточных разбиениях расчетной области приведены на рис. 4. Здесь следует отметить одну любопытную деталь: полинейный рекуррентный метод при увеличении количества узлов сеточного разбиения области вместо привычного увеличения количества итераций, при требовании к точности ϵ практического порядка $10^{-4} \times 10^{-6}$, дает обратный результат — их уменьшение. В рассматриваемом примере на сетках 101×101 и выше в этом случае метод становится фактически прямым. Объясняется это, по-видимому, тем, что на более мелких сеточных шагах

экстраполяционная формула дает более точный прогноз поведения поправки решения, что, соответственно, усиливает неявный характер разрешающего оператора и, следовательно, уменьшает количество необходимых для сходимости итераций.

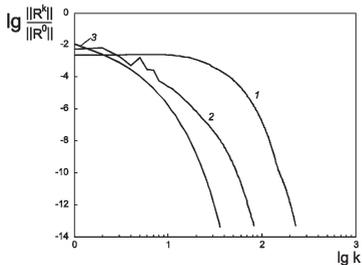


Рис. 5

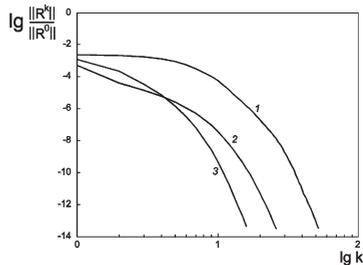


Рис. 6

1 — без компенсации, $\theta = \theta_0 = 1,0$; 2 — с компенсации, $\theta_0 = 1,0$;
3 — компенсации, $\theta = \theta_{\text{opt}} = 0,997$

В работе [5], в целях повышения эффективности используемого модифицированного полинейного метода (МР) решения СЛАУ [4], предлагается технология подбора значения итерационного параметра индивидуально для каждого уравнения на каждом итерационном шаге. На рис. 5 (метод МР) и 6 (метод R1 — полинейный рекуррентный с линейной экстраполяцией «внешаблонного» узла) представлена динамика отношения норм невязок в зависимости от номера итерации на сетке 101×101 . На этих графиках хорошо видно, что во всем диапазоне требования по точности технология компенсации итерационного параметра не исчерпывает всего потенциала ускорения расчетов, а в случае оптимизации θ иным способом — практически не влияет на скорость сходимости. К тому же здесь выявляется еще одна деталь применения технологии компенсации: она может приводить к понижению устойчивости вычислительного процесса на начальных итерациях, либо вообще не позволяет достигнуть наперед заданной точности. Подобные результаты наблюдаются при использовании метода R1 (рис. 6) за исключением того, что в данных расчетах не выявлено негативное влияние применения технологии компенсации на устойчивость вычислений. Однако применение технологии компенсации в случае метода R2 (полинейный рекуррентный с квадратичной экстраполяцией «внешаблонного» узла), не сказывается на повышении скорости сходимости.

Литература

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М. : Наука, 1989.
2. Фомин А. А., Фомина Л. Н. Полинейный рекуррентный метод решения разностных эллиптических уравнений. — Кемерово : КемГУ. — 2007. — 78 с. — Деп. в ВИНТИ 06.04.2007, № 385-В2007.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач тепломас-сообмена и динамики жидкости. — М. : Энергоатомиздат, — 1984.
4. Зверев В. Г. Модифицированный полинейный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. — 1998. — Т. 38. — № 9. — С. 1553—1562.
5. Zverev V. G. About the iteration method for solving difference equations // Lecture notes in computer science.— Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. — 2005. — Vol. 3401.— P. 621—628.